

Capítulo 1

Introdução à Pesquisa Operacional

1.1 Introdução

Este curso envolve o estudo de métodos quantitativos para auxílio à tomada de decisões (*decision making*, em inglês), reunidos sob a denominação de **Pesquisa Operacional** (*Operational Research*, na Inglaterra; *Operations Research* nos Estados Unidos), **Ciência da Administração** (*Management Science*) ou **Ciência da Decisão** (*Decision Science*). Os métodos da Pesquisa Operacional visam auxiliar na seleção da melhor maneira de se operar um sistema, usualmente sob condições que exijam a utilização de recursos limitados.

Empresas podem ser vistas como sistemas que visam obter o maior **retorno** possível para as suas atividades, com retorno podendo significar qualidade do serviço prestado no caso de uma empresa pública, ou lucro financeiro no caso de uma empresa privada. **Planejar** as atividades de uma empresa produtora de bens (eletrodomésticos, equipamentos eletrônicos, automóveis, ...) e de serviços (telefonias, transporte, energia, ...) significa determinar que decisões a empresa deve tomar, eventualmente ao longo do tempo e sob condições de incerteza, para maximizar o seu retorno.

Problemas práticos de planejamento podem exigir a utilização de **sistemas de suporte à decisão**, *softwares* destinados a apoiar o processo de tomada de decisões. Sistemas deste tipo geralmente oferecem opções de **modelagem matemática** e de métodos quantitativos para tomada de decisões compatíveis com os modelos adotados. Os modelos matemáticos utilizados em planejamento da produção são geralmente **modelos de otimização**, no sentido de que estes modelos prescrevem obter decisões **ótimas**, como mínimo custo ou máximo lucro de produção, por exemplo.

Existe um modelo de otimização adequado a cada problema de planejamento. Dá-se o nome de **Programação Matemática** ao conjunto de modelos e métodos de otimização utilizados em planejamento da produção, podendo o termo programação (*programming*) ser entendido como sinônimo de planejamento (*planning*). Os modelos e métodos da programação matemática constituem um subconjunto dos modelos

e métodos da Pesquisa Operacional. Um estudo introdutório dos principais métodos da programação matemática é o objetivo central deste curso.

1.2 Breve Histórico

O termo Pesquisa Operacional foi utilizado pela primeira vez na Grã-Bretanha em 1938 para designar o estudo sistemático de problemas estratégicos e táticos decorrentes de operações militares. Numa atuação clássica, um grupo de especialistas (matemáticos, físicos, engenheiros, ...) foi designado para avaliar e reposicionar adequadamente os radares do sistema de defesa aérea da Grã-Bretanha antes e durante a Segunda Guerra Mundial. Outras aplicações militares incluíram o planejamento de operações de comboios, bombardeios e de guerra anti-submarina.

Após a Segunda Guerra Mundial, muitos dos especialistas que estiveram envolvidos no planejamento de operações militares deram continuidade a suas pesquisas, agora visando também operações não militares. Provavelmente o desenvolvimento metodológico mais importante do período pós-guerra foi o **Método Simplex**, por George Dantzig, em 1947, para a resolução de problemas de **Programação Linear**, isto é, de problemas de planejamento nos quais são utilizados modelos de otimização lineares. O surgimento de computadores digitais na década de 1950 tornou possível desenvolver e utilizar novas metodologias para resolver uma grande variedade de problemas práticos. À medida que a capacidade computacional disponível foi crescendo, tornou-se possível resolver problemas cada vez mais complexos. Essa tendência se verifica até os dias de hoje.

1.3 Problemas de decisão

Problemas de tomada de decisão são freqüentes no dia-a-dia. Escolher que trajeto seguir para ir de um ponto a outro da cidade ou que refeição pedir num restaurante são exemplos típicos. Nestes casos é preciso selecionar uma alternativa dentre várias outras possíveis de maneira a satisfazer um ou mais objetivos, como minimizar o tempo de trajeto no primeiro caso e o consumo de calorias no segundo.

Nem sempre o problema de tomada de decisão possui um único objetivo ou os objetivos do problema são completamente mensuráveis. Exemplo: um aluno recém-formado recebe três propostas de emprego, resumidas na Tabela 1.1. Se o objetivo visar o maior salário inicial, a melhor decisão é pela Empresa A; se visar o maior potencial para desenvolvimento pessoal e profissional, a Empresa B; se visar a melhor localização, a Empresa C. Embora existam poucas alternativas, nenhuma delas é melhor do ponto de vista de todos os objetivos. Neste caso, o tomador de decisão pode **ponderar** os objetivos, isto é, atribuir pesos (normalmente subjetivos) aos objetivos de salário, potencial e localização, e decidir pela empresa que forneça a melhor ponderação.

Tabela 1.1: Dados para decisão sobre emprego.

Alternativas	Salário Inicial	Potencial de Desenvolvimento	Localização da Empresa
Empresa A	R\$ 4000	Médio	Médio
Empresa B	R\$ 3600	Excelente	Bom
Empresa C	R\$ 3700	Bom	Excelente

Intuição e experiência prévia ao lidar com problemas similares são as principais características empregadas pelos chamados **métodos qualitativos** para tomada de decisões.

Métodos quantitativos

Se o tomador de decisão é inexperiente no tipo de problema considerado, ou se este é complexo o bastante para que intuição e experiência não sejam suficientes, então a adoção de **métodos quantitativos** pode ser importante para se chegar a uma decisão final. Por métodos quantitativos entenda-se métodos baseados em dados quantitativos e em modelos descritos por expressões matemáticas que os relacionam. Métodos quantitativos são especialmente úteis quando:

1. O problema é complexo e não se consegue chegar a uma solução adequada sem o emprego de análise quantitativa;
2. O problema é importante – envolve questões de segurança, por exemplo – e uma análise completa antes da decisão é necessária;
3. O problema é novo e não se dispõe de experiência prévia que permita antecipar o tipo de decisão a ser tomada;
4. O problema é repetitivo e a decisão pode ser tomada de forma automática, o que economiza tempo e esforço.

Diferentemente do processo de decisão baseado em métodos qualitativos, geralmente centrado na experiência que o tomador de decisão acumulou ao longo dos anos, decisões baseadas em métodos quantitativos requerem uma estruturação do problema, seguida de sua representação matemática e da utilização de métodos de análise apropriados. A saída produzida pelo método quantitativo adotado é então **recomendada** ao tomador de decisão.

Os métodos qualitativos e quantitativos devem ser vistos como complementares. A experiência acumulada pelo tomador de decisão é importante para guiar a escolha e a utilização de métodos quantitativos, enquanto que a análise das decisões decorrentes do emprego de métodos quantitativos ajuda o tomador de decisão a aumentar sua intuição e conhecimento sobre o problema, realimentando o processo de tomada de decisão.

Contrariamente à abordagem qualitativa, ganha-se habilidade na aplicação da abordagem quantitativa ao se estudar sistematicamente as hipóteses e as características particulares dos métodos quantitativos utilizados como ferramentas para

tomada de decisões. A principal característica destes métodos é o emprego de **modelos matemáticos** para descrever problemas e avaliar o impacto das decisões tomadas.

1.4 Modelos matemáticos

Dependendo do objeto de estudo, os métodos quantitativos podem empregar basicamente dois tipos de modelos: **concretos** ou **abstratos**. Modelos concretos ou físicos são utilizados, por exemplo, em estudos de aerodinâmica, quando uma versão em escala reduzida de uma aeronave em projeto é submetida a testes em túneis-de-vento. Modelos abstratos ou matemáticos são mais freqüentemente utilizados para descrever fenômenos como movimento e equilíbrio de corpos físicos, crescimento populacional e variações climáticas, entre outros. Eventualmente pode-se utilizar modelos abstratos numa etapa preliminar à construção de modelos concretos, como forma de excluir alternativas para o projeto aerodinâmico de uma aeronave, por exemplo.

Modelos matemáticos são usados para descrever problemas de planejamento, mas, como em outras áreas do conhecimento, devem ser vistos como aproximações dos problemas reais que procuram retratar. Para que seja útil, um modelo de planejamento deve capturar os aspectos essenciais do problema, o que exige habilidade na tarefa de modelagem. Para se chegar a resultados significativos a partir de modelos, uma boa capacidade de análise é também fundamental. Habilidade e capacidade de análise podem ser adquiridas por meio da experiência prática e do entendimento da teoria por trás dos modelos matemáticos.

Como modelos são aproximações de realidades, uma abordagem progressiva, que poderia ser vista como uma aplicação do **Método Científico** a problemas de tomada de decisões, é quase sempre utilizada. Os principais passos dessa abordagem seriam os seguintes:

1. Defina o problema a ser resolvido;
2. Construa um modelo para o problema;
3. Obtenha uma solução baseada no modelo;
4. Verifique se a solução é realista.
 - Se **Sim**, vá para 5; se **Não**, volte para 2;
5. Implemente a solução obtida.

Definição do problema

A definição do problema envolve delimitar seu escopo, descrever que quantidades representam dados, que quantidades podem ser manipuladas, que objetivo deve ser atingido e que eventuais limitações podem atuar no sentido de restringir as quantidades manipuladas, isto é, as alternativas de solução (decisão) para o problema.

Construção do modelo

A construção de um modelo começa pela adoção de uma notação apropriada para as principais quantidades presentes na definição do problema. É comum denotar por

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

as (por hipótese) n quantidades manipuladas do problema. Dá-se o nome de **variáveis de decisão** a estas quantidades. Os dados do problema podem ser representados por outras letras do alfabeto e são também referidos como **parâmetros** do problema. O passo seguinte é redefinir matematicamente o problema por meio de **fórmulas**, **relações matemáticas** ou **proposições**. Uma fórmula denominada de **função-objetivo** é utilizada para descrever como o objetivo do problema é influenciado pelos valores das variáveis de decisão. Relações matemáticas envolvendo os símbolos "=", " $\leq$ ", " $\geq$ " e proposições gerais são empregadas para descrever eventuais **restrições** para a escolha de valores para as variáveis de decisão.

Os modelos matemáticos normalmente adotados para problemas de planejamento são **prescritivos**, no sentido de que prescrevem como o tomador de decisão deve agir para que a solução derivada do modelo cumpra o objetivo proposto. A prescrição quase sempre é **otimizar** a função-objetivo sujeito às restrições, sendo que otimizar pode significar, dependendo do objetivo do problema, **minimizar** ou **maximizar**, isto é, determinar os valores das variáveis de decisão que conduzem ao menor ou maior valor para a função-objetivo. Um modelo sintético, prescritivo, para o problema de decisão seria

$$\left| \begin{array}{ll} \text{otimizar} & (\text{função-objetivo}) \\ \text{sujeito a} & (\text{restrições}). \end{array} \right.$$

Representando as variáveis de decisão por meio do **vetor** n -dimensional $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, é possível expressar tanto a função-objetivo como as restrições em termos de x . Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$, funções de n variáveis, a primeira associada à função-objetivo e as p seguintes às restrições do modelo. Denotando por " $\sim$ " qualquer das relações "=", " $\leq$ ", " $\geq$ ", obtém-se o modelo prescritivo na forma simbólica

$$\left| \begin{array}{ll} \text{otimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g_1(x) \sim_1 b_1, \\ & g_2(x) \sim_2 b_2, \\ & \vdots \\ & g_p(x) \sim_p b_p, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

no qual b_i , $i = 1, 2, \dots, p$ são valores constantes. É comum referir-se a (1.1) como **modelo** ou **problema de otimização** associado ao problema de decisão.

Exemplo 1.1 A construção de tanques para armazenagem de produtos é comum na indústria petroquímica. Considere o problema de projetar um tanque cilíndrico com capacidade volumétrica mínima de $V \text{ m}^3$. O objetivo do projeto é obter um tanque com a menor superfície total possível.

A forma do tanque é determinada pelo raio das áreas circulares e da altura do cilindro que o representa. É natural então definir as variáveis de decisão, x_1 e x_2 , como raio e altura do tanque, em metros, respectivamente. Em termos das variáveis de decisão, a superfície total do tanque é dada por

$$2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2. \quad (1.2)$$

A primeira parcela de (1.2) é a superfície das (duas) áreas circulares. A segunda parcela é a superfície da área lateral. O volume do tanque é $\pi x_1^2 x_2$ (área da base vezes a altura). Além disso, por representarem comprimentos, as variáveis de decisão podem assumir apenas valores não negativos, isto é, deve-se impor $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. O problema de otimização associado ao problema de projeto seria

$$\left| \begin{array}{ll} \text{minimizar} & 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \\ \text{sujeito a} & \pi x_1^2 x_2 \geq V, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Em termos da formulação geral (1.1), $n = 2$, $m = 3$, $f(x) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2$, $g_1(x) = \pi x_1^2 x_2$, $g_2(x) = x_1$, $g_3(x) = x_2$, $b_1 = V$, $b_2 = b_3 = 0$ e as restrições são do tipo " $\geq$ ". $\square$

Obtenção de uma solução

Vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de variáveis de decisão representam possíveis soluções para o problema de otimização (1.1). Uma solução é **viável** – em geral existem inúmeras soluções viáveis – se satisfaz todas as restrições do problema; uma solução é **inviável**, caso contrário. No Exemplo 1.1, qualquer solução com raio e altura não negativos gerando um cilindro de volume maior ou igual a V é viável. Uma solução é **ótima** – podem existir inúmeras soluções ótimas – se produz o menor (maior) valor para a função-objetivo; uma solução é **subótima**, caso contrário.

Quando o problema de otimização é simples, pode-se obter soluções ótimas (viáveis) lançando-se mão das **condições de otimalidade** aplicáveis ao problema. O estudo de condições de otimalidade é um dos objetivos do curso e será desenvolvido oportunamente. Por hora registre-se apenas que a solução ótima para o problema de otimização (1.3), obtida a partir de condições de otimalidade, é

$$x_1^* = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3}, \quad x_2^* = \left(\frac{4V}{\pi} \right)^{1/3} = 2x_1^*.$$

A solução ótima encontra-se parametrizada por V (volume). A superfície total é minimizada quando a altura do tanque é igual ao diâmetro da sua base.

O estudo de métodos numéricos voltados para resolução de problemas de otimização em computadores é outro objetivo do curso. Um método é **exato** quando é capaz de gerar uma solução ótima $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ para o problema (1.1). Entretanto, existem problemas de otimização complexos o bastante para tornar a aplicação de métodos exatos impraticável, porque isso implicaria em tempos de

processamento infinitos para todos os propósitos práticos. Para problemas desta natureza pode-se adotar um método **heurístico**. Enquanto que nos métodos exatos todo o conjunto de soluções viáveis é explorado com vistas à obtenção de uma solução ótima, nos métodos heurísticos apenas um subconjunto apropriado de soluções viáveis é explorado visando-se obter uma **boa solução** em tempo de processamento razoável.

Validação da solução

Esta etapa do processo envolve verificar se o modelo adotado e a solução obtida por meio dele são compatíveis com a realidade do problema. Se todas as características relevantes do problema tiverem sido levadas em conta na modelagem, a solução obtida será implementável. Caso contrário, um novo ciclo de modelagem e obtenção de solução terá de ser desenvolvido. Suponha, por exemplo, que a área da base do tanque revela-se maior do que a área disponível para colocá-lo, um aspecto que não foi considerado inicialmente na modelagem. Uma possibilidade seria definir um raio máximo $\bar{x}_1$ para a base e incorporar ao modelo uma restrição do tipo $x_1 \leq \bar{x}_1$. Uma nova solução ótima seria obtida, e o processo repetido, até que não mais restassem diferenças significativas entre modelo e realidade.

Implementação da solução

A implementação de uma solução validada envolve transformar a solução, obtida a partir do modelo, em um conjunto de instruções na linguagem operacional usada pelos administradores do sistema.

1.5 Programação matemática

A utilização de modelos de otimização caracteriza os métodos da programação matemática. Um modelo de otimização pode ser genericamente classificado como **determinístico** ou **estocástico**, em relação ao grau de precisão com que os parâmetros do modelo são conhecidos, **monoobjetivo** ou **multiobjetivo**, em relação ao número de funções-objetivos utilizadas no modelo, e **dinâmico** ou **estático**, em relação à capacidade do modelo de representar decisões por etapas ou estágios.

Modelos de otimização determinísticos monoobjetivos estáticos são abordados na maior parte deste curso. Uma classificação dos principais modelos de otimização discutidos no curso baseada na natureza das variáveis de decisão e das diversas funções presentes do modelo é apresentada a seguir.

Programação linear

Modelos de programação linear envolvem variáveis de decisão que podem assumir qualquer valor real. A função-objetivo e as funções que descrevem restrições são lineares, isto é, assumem a forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad (1.4)$$

na qual $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e β são valores reais conhecidos.

Programação inteira

Os modelos de programação inteira diferem dos modelos de programação linear pela inclusão da restrição adicional de que todas as variáveis de decisão podem assumir apenas valores inteiros.

Programação não-linear

Modelos não-lineares envolvem variáveis de decisão que podem assumir qualquer valor real, mas ou a função-objetivo ou alguma função presente nas restrições não pode ser expressa na forma (1.4). (Vide Exemplo 1.1.)

1.6 Softwares

A maioria dos métodos da programação matemática encontra-se implementada computacionalmente em *softwares* comerciais, como o **MATLAB/Optimization Toolbox** ou **Xpress^{MP}**, a serem adotados. O curso procurará enfatizar os aspectos de modelagem dos processos de tomada de decisão e discutir os métodos mais adequados aos diferentes modelos de otimização gerados.