APOSTILA DO CURSO

PESQUISA OPERACIONAL

Prof. Erico Fagundes Anicet Lisboa, M. Sc.
erico@ericolisboa.eng.br

Versão digital disponível na internet
http://www.ericolisboa.eng.br

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 2002

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

1.1 O Desenvolvimento da Pesquisa Operacional

Durante a Segunda Guerra Mundial, um grupo de cientistas foi convocado na Inglaterra para estudar problemas de estratégia e de tática associados com a defesa do país. O objetivo era decidir sobre a utilização mais eficaz de recursos militares limitados. A convocação deste grupo marcou a primeira atividade formal de pesquisa operacional.

Os resultados positivos conseguidos pela equipe de pesquisa operacional inglesa motivaram os Estados Unidos a iniciarem atividades semelhantes. Apesar de ser creditada à Inglaterra a origem da Pesquisa Operacional, sua propagação deve-se principalmente à equipe de cientistas liderada por George B. Dantzig, dos Estados Unidos, convocada durante a Segunda Guerra Mundial. Ao resultado deste esforço de pesquisa, concluído em 1947, deu-se o nome de *Método Simplex*.

Com o fim da guerra, a utilização de técnicas de pesquisa operacional atraiu o interesse de diversas outras áreas. A natureza dos problemas encontrados é bastante abrangente e complexa, exigindo portanto uma abordagem que permita reconhecer os múltiplos aspectos envolvidos. Uma característica importante da pesquisa operacional e que facilita o processo de análise e de decisão é a utilização de modelos. Eles permitem a experimentação da solução proposta. Isto significa que uma decisão pode ser mais bem avaliada e testada antes de ser efetivamente implementada. A economia obtida e a experiência adquirida pela experimentação justificam a utilização da Pesquisa Operacional.

Com o aumento da velocidade de processamento e quantidade de memória dos computadores atuais, houve um grande progresso na Pesquisa Operacional. Este progresso é devido também à larga utilização de microcomputadores, que se tornaram unidades isoladas dentro de empresas. Isso faz com que os modelos desenvolvido pelos profissionais de Pesquisa Operacional sejam mais rápidos e versáteis, além de serem também interativos, possibilitando a participação do usuário ao longo do processo de cálculo.

1.2 Modelagem

Um modelo é uma representação de um sistema real, que pode já existir ou ser um projeto aguardando execução. No primeiro caso, o modelo pretende reproduzir o funcionamento do sistema, de modo a aumentar sua produtividade. No segundo caso, o modelo é utilizado para definir a estrutura ideal do sistema.

A confiabilidade da solução obtida através do modelo depende da validação do modelo na representação do sistema real. A validação do modelo é a confirmação de que ele realmente representa o sistema real. A diferença entre a solução real e a solução proposta pelo modelo depende diretamente da precisão do modelo em descrever o comportamento original do sistema.

Um problema simples pode ser representado por modelos também simples e de fácil solução. Já problemas mais complexos requerem modelos mais elaborados, cuja solução pode vir a ser bastante complicada.

1.3 Estrutura de Modelos Matemáticos

Em um modelo matemático, são incluídos três conjuntos principais de elementos:

(1) variáveis de decisão e parâmetros: variáveis de decisão são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo. Parâmetros são valores fixos no problema;

(2) restrições: de modo a levar em conta as limitações físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam as variáveis de decisão a seus valores possíveis (ou viáveis);

(3) função objetivo: é uma função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão.

Para melhor ilustrar ao conjuntos acima, considere o seguinte exemplo:

"Uma empresa de comida canina produz dois tipos de rações: Tobi e Rex. Para a manufatura das rações são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

- ✓ a ração Tobi utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne, e a ração Rex utiliza 4 kg de carne e 2 kg de cereais;
- ✓ o pacote de ração Tobi custa $ 20 e o pacote de ração Rex custa $ 30;
- ✓ o kg de carne custa $ 4 e o kg de cereais custa $ 1;
- ✓ estão disponíveis por mês 10 000 kg de carne e 30 000 kg de cereais.

Deseja-se saber qual a quantidade de cada ração a produzir de modo a maximizar o lucro."

Neste problema as variáveis de decisão são as quantidades de ração de cada tipo a serem produzidas. Os parâmetros fornecidos são os preços unitários de compra e venda, além das quantidades de carne e cereais utilizadas em cada tipo de ração. As restrições são os limites de carne e cereais e a função objetivo é uma função matemática que determine o lucro em função das variáveis de decisão e que deve ser maximizada.

1.4 Técnicas Matemáticas em Pesquisa Operacional

A formulação do modelo depende diretamente do sistema a ser representado. A função objetivo e as funções de restrições podem ser lineares ou não-lineares. As variáveis de decisão podem ser contínuas ou discretas (por exemplo, inteiras) e os parâmetros podem ser determinísticos ou probabilísticos.

O resultado dessa diversidade de representações de sistemas é o desenvolvimento de diversas técnicas de otimização, de modo a resolver cada tipo de modelo existente. Estas técnicas incluem, principalmente: programação linear, programação inteira, programação dinâmica, programação estocástica e programação não-linear. *Programação linear* é utilizada para analisar modelos onde as restrições e a função objetivo são lineares; *programação inteira* se aplica a modelos que possuem variáveis inteiras (ou discretas); *programação dinâmica* é utilizada em modelos onde o problema completo pode ser decomposto em subproblemas menores; *programação estocástica* é aplicada a uma classe especial de modelos onde os parâmetros são descritos por funções de probabilidade; finalmente, *programação não-linear* é utilizada em modelos contendo funções não-lineares.

Uma característica presente em quase todas as técnicas de programação matemática é que a solução ótima do problema não pode ser obtida em um único passo, devendo ser obtida iterativamente. É escolhida uma solução inicial (que geralmente não é a solução ótima). Um algoritmo é especificado para determinar, a partir desta, uma nova solução, que geralmente é superior à anterior. Este passo é repetido até que a solução ótima seja alcançada (supondo que ela existe).

1.5 Fases do Estudo de Pesquisa Operacional

Um estudo de pesquisa operacional geralmente envolve as seguintes fases:

(1) definição do problema;

(2) construção do modelo;

(3) solução do modelo;

(4) validação do modelo;

(5) implementação da solução.

Apesar da seqüência acima não ser rígida, ela indica as principais etapas a serem vencidas. A seguir, é apresentado um resumo da cada uma das fases.

1.5.1 Definição do problema

A definição do problema baseia-se em três aspectos principais:

- ✓ descrição exata dos objetivos do estudo;
- ✓ identificação das alternativas de decisão existentes;
- ✓ reconhecimento das limitações, restrições e exigências do sistema.

A descrição dos objetivos é uma das atividades mais importantes em todo o processo do estudo, pois a partir dela é que o modelo é concebido. Da mesma forma, é essencial que as alternativas de decisão e as limitações existentes sejam todas explicitadas, para que as soluções obtidas ao final do processo sejam válidas e aceitáveis.

1.5.2 Construção do modelo

A escolha apropriada do modelo é fundamental para a qualidade da solução fornecida. Se o modelo elaborado tem a forma de um modelo conhecido, a solução pode ser obtida através de métodos matemáticos convencionais. Por outro lado, se as relações matemáticas são muito complexas, talvez se faça necessária a utilização de combinações de metodologias.

1.5.3 Solução do modelo

O objetivo desta fase é encontrar uma solução para o modelo proposto. Ao contrário das outras fases, que não possuem regras fixas, a solução do modelo é baseada geralmente em técnicas matemáticas existentes.

No caso de um modelo matemático, a solução é obtida pelo algoritmo mais adequado, em termos de rapidez de processamento e precisão da resposta. Isto exige um conhecimento profundo das principais técnicas existentes. A solução obtido, neste caso, é dita "ótima".

1.5.4 Validação do modelo

Nessa altura do processo de solução do problema, é necessário verificar a validade do modelo. Um modelo é válido se, levando-se em conta sua inexatidão em representar o sistema, ele for capaz de fornecer uma previsão aceitável do comportamento do sistema.

Um método comum para testar a validade do sistema é analisar seu desempenho com dados passados do sistema e verificar se ele consegue reproduzir o comportamento que o sistema apresentou.

É importante observar que este processo de validação não se aplica a sistemas inexistentes, ou seja, em projeto. Nesse caso, a validação é feita pela verificação da correspondência entre os resultados obtidos e algum comportamento esperado do novo sistema.

1.5.5 Implementação da solução

Avaliadas as vantagens e a validação da solução obtida, esta deve ser convertida em regras operacionais. A implementação, por ser uma atividade que altera uma situação existente, é uma das etapas críticas do estudo. É conveniente que seja controlada pela equipe responsável, pois, eventualmente, os valores da nova solução, quando levados à prática, podem demonstrar a necessidade de correções nas relações funcionais do modelo conjunto dos possíveis cursos de ação, exigindo a reformulação do modelo em algumas de suas partes.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA LINEAR

Ao longo do curso de pesquisa operacional, conceitos matemáticos como matrizes e vetores são largamente utilizados. Este capítulo tem como objetivo apresentar uma revisão desses fundamentos matemáticos, de modo que o curso possa ser compreendido.

2.1 Vetores

Um vetor é um conjunto de números, que pode ser escrito como

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots , p_n).$$

O vetor **p** é um vetor de dimensão n, ou seja, possui n elementos. Vetores são geralmente representadas por letras minúsculas em negrito, e seus elementos são geralmente representados por letras minúsculas com um subscrito. A letra usada para os elementos é normalmente a mesma letra utilizada para o vetor. O subscrito representa o índice do elemento no vetor. Por exemplo, p_2 é o segundo elemento do vetor. A notação p_i indica o i-ésimo elemento do vetor.

2.1.1 Soma e subtração de vetores

Dois vetores podem ser adicionados se e somente se eles tiverem a mesma dimensão. Para somar dois vetores, basta somar individualmente cada elemento deles. O vetor resultante será da mesma dimensão do vetores originais. Simbolicamente, temos que, se $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, então $r_i = p_i + q_i$, para todo i.

Dados os vetores

$\mathbf{p} = (4, 5, 1, 7)$ $\mathbf{q} = (1, -2, 3, -4)$ $\mathbf{r} = (1, 5, 4)$

temos que:

- ✓ $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (5, 3, 4, 3)$;
- ✓ não é possível computar **p** + **r**, nem **q** + **r**, visto que **p** e **q** são de 4ª dimensão e **r** é de 3ª.

Um vetor pode ser multiplicado por um escalar, multiplicando-se cada elemento do vetor por este escalar. Por exemplo,

$$2\,(1, 3, -2) = (2, 6, -4)$$

Subtração entre dois vetores é equivalente a somar o primeiro com o produto do segundo pelo escalar -1. Então $\mathbf{s} - \mathbf{t} = \mathbf{s} + (-\mathbf{t})$. Por exemplo.

$$(1, 4, 3) - (0, 2, -1) = (1, 4, 3) + (0, -2, 1) = (1, 2, 4)$$

2.1.2 Vetores LD e LI

Um conjunto de vetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots , \mathbf{p}_n$, é dito linearmente independente (LI) se e somente se, para todo q_j real,

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

implica que todo $q_j = 0$, onde q_j são quantidades escalares. Se

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

para algum $q_j \neq 0$, os vetores são ditos linearmente dependentes (LD). Por exemplo, os vetores

$$\mathbf{p}_1 = (1, 2) \qquad\qquad \mathbf{p}_2 = (2, 4)$$

são linearmente dependentes, já que existe $q_1 = 2$ e $q_2 = -1$ para os quais

$$q_1 \mathbf{p}_1 + q_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}.$$

2.2 Matrizes

Uma matriz é um conjunto retangular de números, que pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{mn} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A matriz **A** é uma matriz de ordem m x n, ou seja, possui m linha e n colunas. Matrizes são geralmente representadas por letras maiúsculas em negrito, e seus elementos são geralmente representados por letras minúsculas com dois subscritos. A letra usada para os elementos é normalmente a mesma letra utilizada para a matriz. Os subscritos representam respectivamente a linha e a coluna ocupadas pelo elemento na matriz. Por exemplo, a_{23} é o elemento localizado na segunda linha e na terceira coluna da matriz. A notação a_{ij} indica o elemento localizado na i-ésima linha e na j-ésima coluna da matriz.

Duas matrizes **A** e **B** são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para qualquer i e j. Para isso, é necessário que as matrizes **A** e **B** sejam de mesma ordem, ou seja, tenham o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

2.2.1 Soma e subtração de matrizes

Duas matrizes podem ser adicionadas se e somente se elas forem da mesma ordem. Para somar duas matrizes, basta somar individualmente cada elemento delas. A matriz resultante será da mesma ordem das matrizes originais. Simbolicamente, temos que, se **C** = **A** + **B**, então $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j.

Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

temos que:

- ✓ as matrizes **A** e **C** são iguais;
- ✓ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;
- ✓ não é possível computar **A** + **D**, nem **B** + **D**, visto que **A** e **B** são 3 x 4 e **D** é 3 x 3.

Uma matriz pode ser multiplicada por um escalar, multiplicando-se cada elemento da matriz por este escalar. Por exemplo,

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtração entre duas matrizes é equivalente a somar a primeira com o produto da segunda pelo escalar -1. Então **E** - **F** = **E** + (-**F**). Por exemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Produto de matrizes

O produto de duas matrizes somente pode ser efetuado se o número de colunas da matriz à esquerda for igual ao número de linhas da matriz à direita. O produto de matrizes é, em geral, não comutativo, ou seja, dadas duas matrizes **A** e **B** e seu produto, **AB**, o produto **BA** pode não existir e, se existe, pode *não ser igual* a **AB**. O produto de duas matrizes tem o número de linhas da matriz à esquerda e o número de colunas da matriz à direita. Ou seja, sendo **C** = **AB**, se **A** é *m* x *n* e **B** é *n* x *p*, **C** é *m* x *p*.

Os elementos da matriz resultante são calculados através do somatório dos produtos de elementos das duas matrizes. Especificamente, c_{ij} é calculado por $a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \ldots + a_{in}\,b_{nj}$, onde *n* é o número de colunas de **A** e de linhas de **B**.

Exemplos:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 7 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ (**BA** não existe)

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Note que no primeiro exemplo existe apenas o produto **AB**, não sendo possível efetuar o produto **BA**. No segundo exemplo, apesar de ser possível efetuar os dois produtos, as matrizes resultantes não são iguais, não sendo sequer do mesmo tipo.

2.2.3 Matrizes especiais

Matriz quadrada

Uma matriz quadrada tem o mesmo número de linhas e de colunas. A *ordem* de uma matriz quadrada é o seu número de linhas (ou de colunas).

Exemplos: matrizes 2 x 2 (2ª ordem), 3 x 3 (3ª ordem), *n* x *n* (*n*-ésima ordem).

Matriz nula

Uma matriz nula possui zeros em todos os seus elementos.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A matriz nula é equivalente ao zero para adição em álgebra escalar, ou seja, se **B** é uma matriz nula de mesmo tipo de **A**, então **A** + **B** = **B** + **A** = **A**.

Matriz identidade

Uma matriz identidade, denotada por **I**, é uma matriz quadrada onde sua diagonal principal é composta de 1's e todos os outros elementos são zero.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A matriz identidade é equivalente ao um para produto em álgebra escalar, ou seja, **AI** = **A**.

Matriz transposta

A transposta de uma matriz é a matriz obtida pela troca das linhas pelas colunas da matriz original, de modo que a coluna *j* da matriz original passe a ser a linha *j* da matriz transposta e a linha *i* da matriz original passe a ser a coluna *i* da matriz transposta. A transposta de uma matriz **A** é indicada pela notação $\mathbf{A}^T$ ou **A**'.

Exemplos: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

A transposta de uma matriz *m* x *n* será sempre uma matriz *n* x *m*.

Matriz simétrica

Uma matriz é dita simétrica se ela for igual à sua transposta. Ou seja, uma matriz **A**, simétrica, é necessariamente quadrada e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplos: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz anti-simétrica

Uma matriz é dita anti-simétrica se ela for simétrica à sua transposta, isto é, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$. Ou seja, uma matriz **A**, simétrica, é necessariamente quadrada e $a_{ij} = -a_{ji}$. Os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são necessariamente nulos.

Exemplos: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2.4 A inversa de uma matriz

A operação de divisão não é definida em álgebra matricial. Entretanto, para certas matrizes quadradas existe outra (única) matriz quadrada de mesma ordem que o produto das duas matrizes é a matriz identidade. Esta matriz é chamada de matriz inversa da primeira matriz. A inversa de uma matriz é designada pelo expoente -1.

Exemplo: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$

2.3 Sistemas de Equações Lineares

Tanto as linhas quanto as colunas de uma matriz podem ser tratadas por vetores. Um vetor pode ser considerado uma matriz de uma única linha, ou uma única coluna. Quando um vetor é considerado uma matriz com uma única linha, é chamado *vetor linha*. Quando é uma matriz de uma única coluna, é chamado de *vetor coluna*. Um vetor coluna será representado da mesma forma que um vetor convencional, ou seja, uma letra minúscula em negrito (**p**, **q**, **r**). Quando for o caso de um vetor linha, ele será representado como um vetor transposto ($\mathbf{p}^T$, $\mathbf{q}^T$, $\mathbf{r}^T$).

Suponha o seguinte sistema de equações lineares:

$$2\,x_1 - x_2 = 7$$

$$-\,x_1 + 4\,x_2 = 0$$

Este sistema pode ser representado na forma matricial por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

O vetor coluna **x** é o vetor solução do sistema de equações e pode ser calculado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}.$$

Para a solução de um sistema de equações lineares, são propostos alguns métodos.

2.3.1 Método algébrico por adição

Pelo menos uma das equações deve ser multiplicada por um escalar real, de modo que, após a soma das equações, apenas uma das variáveis seja efetivamente a incógnita do problema. Por exemplo,

$$4\,x_1 + 8\,x_2 = 160$$

$$6\,x_1 + 4\,x_2 = 120$$

Multiplicando a segunda equação por (-2), temos

$$4\,x_1 + 8\,x_2 = 160$$

$$-12\,x_1 - 8\,x_2 = -240$$

Somando as duas equações, chega-se a:

$$-8\,x_1 = -80$$

Daí, calcula-se facilmente o valor de x_1 e, substituindo este valor em qualquer uma das equações acima, calcula-se o valor de x_2.

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 15$$

2.3.2 Método algébrico por substituição

Isola-se uma das variáveis em uma das equações, substituindo-se a relação obtida na outra equação. Por exemplo,

$$4\,x_1 + 8\,x_2 = 160$$

$$6\,x_1 + 4\,x_2 = 120$$

Manipulando a primeira equação, temos que

$$x_1 = \frac{160 - 8x_2}{4} = 40 - 2x_2$$

Substituindo x_1 na segunda equação,

$$6\,(40 - 2\,x_2) + 4\,x_2 = 120$$

Resolvendo a equação algebricamente, e aplicando o valor de x_2 encontrado na primeira equação

$$240 - 12\,x_2 + 4\,x_2 = 120$$

$$-8\,x_2 = -120$$

$$x_2 = 15$$

$$x_1 = 10$$

2.3.3 Método de Gauss-Jordan

Consiste da derivação de um sistema específico de equações lineares que tenha a mesma solução que o sistema original. Este novo sistema deverá ter o formato de uma matriz identidade, o que pode ser obtido através de combinações lineares das equações originais. Assim, pretende-se que

$$\begin{array}{c} 4\,x_1 + 8\,x_2 = 160 \\ 6\,x_1 + 4\,x_2 = 120 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} 1\,x_1 + 0\,x_2 = \text{a} \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 = \text{b} \end{array}$$

São permitidas as seguintes transformações lineares:

Troca de linhas
Multiplicação da linha por um escalar
Soma de uma linha multiplicada por um escalar a uma outra linha

Notação:

$L_n \leftrightarrow L_m$	troca das linhas *n* e *m*;
$L_n \leftarrow k\,L_n$	multiplicação da linha *n* pelo escalar *k*;
$L_n \leftarrow L_n + k\,L_m$	soma da linha *m* multiplicada pelo escalar *k* à linha *n*.

Para resolver o exemplo acima, são seguidos os seguintes passos:

1. $L_1 \leftarrow L_1 / 4$ (divisão da linha 1 por 4) - transformação do coeficiente de x_1 na equação 1 para 1.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2\,x_2 = 40 \\ 6\,x_1 + 4\,x_2 = 120 \end{array}$$

2. $L_2 \leftarrow L_2 - 6\,L_1$ (subtração da linha 2 pela linha 1 multiplicada por 6) - transformação do coeficiente de x_1 na equação 2 para 0.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2\,x_2 = 40 \\ 0\,x_1 - 8\,x_2 = -120 \end{array}$$

3. $L_2 \leftarrow -\,L_2 / 8$ (divisão da linha 2 por (-8)) - transformação do coeficiente de x_2 na equação 2 para 1.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2\,x_2 = 40 \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 = 15 \end{array}$$

4. $L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_2$ (subtração da linha 1 pela linha 2 multiplicada por 2) - transformação do coeficiente de x_2 na equação 1 para 0.

$$\begin{array}{c} x_1 + 0\,x_2 = 10 \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 = 15 \end{array}$$

Solução

$$\begin{array}{c} x_1 = 10 \\ x_2 = 15 \end{array}$$

CAPÍTULO 3

PROGRAMAÇÃO LINEAR

3.1 Definição

O problema geral de programação linear é utilizado para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de "função objetivo", sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, chamadas restrições. A formulação do problema a ser resolvido por programação linear segue alguns passos básicos.

- ✓ deve ser definido o objetivo básico do problema, ou seja, a otimização a ser alcançada. Por exemplo, maximização de lucros, ou de desempenhos, ou de bem-estar social; minimização de custos, de perdas, de tempo. Tal objetivo será representado por uma função objetivo, a ser maximizada ou minimizada;
- ✓ para que esta função objetivo seja matematicamente especificada, devem ser definidas as variáveis de decisão envolvidas. Por exemplo, número de máquinas, a área a ser explorada, as classes de investimento à disposição etc. Normalmente, assume-se que todas estas variáveis possam assumir somente valores positivos;
- ✓ estas variáveis normalmente estão sujeitas a uma série de restrições, normalmente representadas por inequações. Por exemplo, quantidade de equipamento disponível, tamanho da área a ser explorada, capacidade de um reservatório, exigências nutricionais para determinada dieta etc.

Todas essas expressões, entretanto, devem estar de acordo com a hipótese principal da programação linear, ou seja, todas as relações entre as variáveis deve ser lineares. Isto implica proporcionalidade das quantidades envolvidas. Esta característica de linearidade pode ser interessante no tocante à simplificação da estrutura matemática envolvida, mas prejudicial na representação de fenômenos não lineares (por exemplo, funções de custo tipicamente quadráticas).

3.2 Formulação de Modelos

O problema geral de programação linear pode ser definido por

Maximizar (ou minimizar)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

sujeito a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \leq b_1 \text{ (ou } \geq \text{, ou =)}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \leq b_2 \text{ (ou } \geq \text{, ou =)}$$

$$...$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \leq b_m \text{ (ou } \geq \text{, ou =)}$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

3.3 Exemplo

Vamos rescrever aqui o exemplo da seção 1.3.

"Uma empresa de comida canina produz dois tipos de rações: Tobi e Rex. Para a manufatura das rações são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

- ✓ a ração Tobi utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne, e a ração Rex utiliza 4 kg de carne e 2 kg de cereais;
- ✓ o pacote de ração Tobi custa $ 20 e o pacote de ração Rex custa $ 30;
- ✓ o kg de carne custa $ 4 e o kg de cereais custa $ 1;
- ✓ estão disponíveis por mês 10 000 kg de carne e 30 000 kg de cereais.

Deseja-se saber qual a quantidade de cada ração a produzir de modo a maximizar o lucro."

Nosso modelo deseja maximizar o lucro (Z) a partir da quantidade de ração Tobi (x_1) e de ração Rex (x_2). A Tabela 3.1 apresenta o cálculo do lucro unitário de cada ração.

Tabela 3.1 - Cálculo do lucro unitário de cada ração

	Ração Tobi	Ração Rex
Custo de carne	1 kg x $ 4 = $ 4	4 kg x $ 4 = $ 16
Custo de cereais	5 kg x $ 1 = $ 5	2 kg x $ 1 = $ 2
Custo total	$ 9	$ 18
Preço	$ 20	$ 30
Lucro	$ 11	$ 12

A função objetivo pode ser escrita como

maximizar $Z = 11\, x_1 + 12\, x_2$

sujeito a: $1\, x_1 + 4\, x_2 \leq 10000$ (restrição de carne)

$5\, x_1 + 2\, x_2 \leq 30000$ (restrição de cereais)

$x_1,\, x_2 \geq 0$ (positividade das variáveis)

3.4 Solução Gráfica

Este problema com apenas duas variáveis pode ser resolvido graficamente. Traça-se um gráfico com os seus eixos sendo as duas variáveis x_1 e x_2. A partir daí, traçam-se as retas referentes às restrições do problema e delimita-se a região viável (Figura 3.1).

Encontrada a região viável, deve-se traçar uma reta com a inclinação da função objetivo. São então traçadas diversas paralelas a ela no sentido de Z crescente (maximização da função), como na Figura 3.2. O ponto ótimo é o ponto onde a reta de maior valor possível corta a região viável (normalmente num vértice).

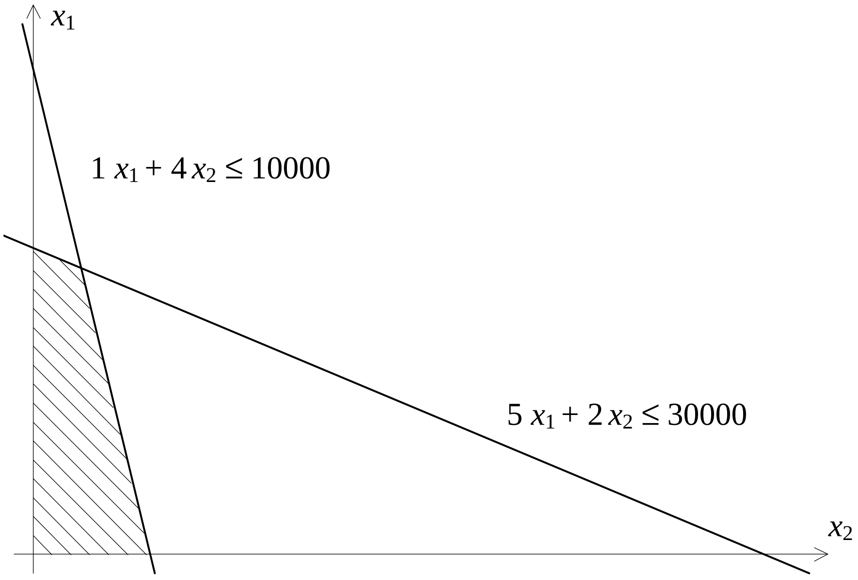


Figura 3.1 - Região viável para o problema das rações.

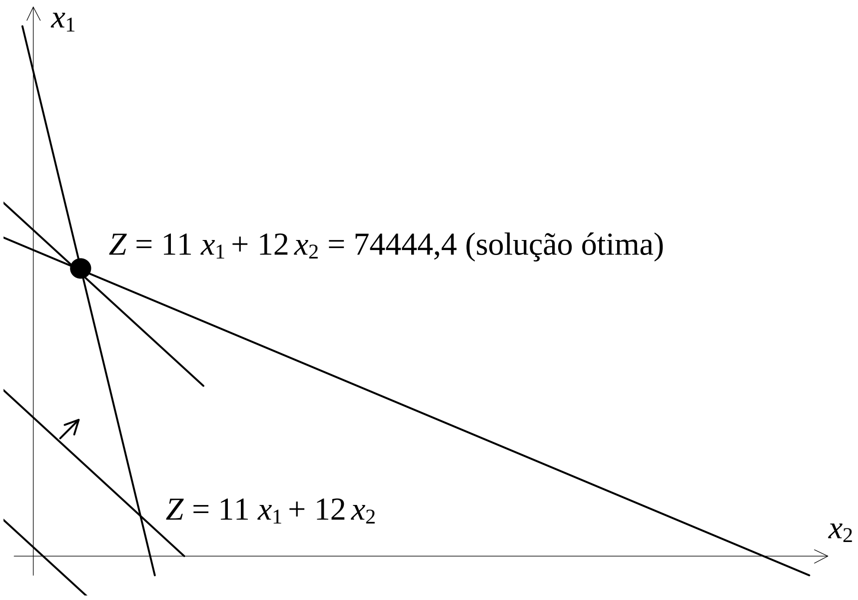


Figura 3.2 - Busca da solução ótima para o problema das rações.

CAPÍTULO 4

O MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex caminha pelos vértices da região viável até encontrar uma solução que não possua soluções vizinhas melhores que ela. Esta é a solução ótima. A solução ótima pode não existir em dois casos: quando não há nenhuma solução viável para o problema, devido a restrições incompatíveis; ou quando não há máximo (ou mínimo), isto é, uma ou mais variáveis podem tender a infinito e as restrições continuarem sendo satisfeitas, o que fornece um valor sem limites para a função objetivo.

4.1 Exemplo de um Problema

O modelo de programação linear pode ser resolvido por um método de solução de sistema de equações lineares. O processo que será apresentado no exemplo a seguir, retirado de ANDRADE (2000), é bastante intuitivo e tem por finalidade apresentar a metodologia utilizada pelo método Simplex.

a) Formulação do problema

"Uma marcenaria deseja estabelecer uma programação diária de produção. Atualmente, a oficina faz apenas dois produtos: mesa e armário, ambos de um só modelo. Para efeito de simplificação, vamos considerar que a marcenaria tem limitações em somente dois recursos: madeira e mão-de-obra, cujas disponibilidades diárias são mostradas na tabela a seguir.

Recurso	Disponibilidade
Madeira	$12m^2$
Mão-de-obra	8 H.h

O processo de produção é tal que, para fazer uma mesa a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 2 H.h de mão-de-obra. Para fazer um armário, a fábrica gasta 3 m^2 de madeira e 1 H.h de mão de obra.

Além disso, o fabricante sabe que cada mesa dá uma margem de contribuição para o lucro de $ 4 e cada armário de $ 1. O problema é encontrar o programa de produção que maximiza a margem de contribuição total para o lucro."

b) Montagem do modelo

As variáveis de decisão envolvidas no problema são:

x_1: quantidade a produzir de mesas

x_2: quantidade a produzir de armários

A função objetivo é:

Lucro: $z = 4\,x_1 + x_2$

Para as restrições, a relação lógica existente é:

Utilização de recurso ≤ Disponibilidade

Assim temos

Madeira: $2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 12$

Mão-de-obra: $2\,x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

O modelo completo é:

Maximizar: $z = 4\,x_1 + x_2$
Sujeito a $2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 12$
$2\,x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$

c) Solução do modelo

Já conhecemos o método de solução gráfica para problemas de programação linear de duas variáveis. Será agora apresentada a solução por sistemas de equações lineares.

De forma a transformar as restrições do problema de programação linear de inequações em equações, são introduzidas as variáveis de folga. Neste problema, as restrições têm a seguinte estrutura lógica:

Utilização de recurso ≤ Disponibilidade.

Ao se introduzir o conceito de folga de recurso, a inequação pode ser escrita como

Utilização de recurso + Folga = Disponibilidade.

Isso significa que

Utilização de recurso < Disponibilidade implica Folga > 0;

Utilização de recurso = Disponibilidade implica Folga = 0.

Deste modo, a folga de cada recurso pode ser representada por uma variável de forma exatamente igual à produção de cada produto. Desse modo, vamos chamar:

f_1: folga de madeira;

f_2: folga de mão-de-obra.

Introduzindo as variáveis de folga, o problema a ser resolvido passa a ser:

Maximizar: $z = 4\,x_1 + x_2$

Sujeito a $2\,x_1 + 3\,x_2 + f_1 = 12$

$2\,x_1 + x_2 + f_2 = 8$

$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

O problema se transformou em encontrar a solução do sistema de equações lineares que maximiza o lucro. Como neste caso o número de variáveis (m = 4) é superior ao número de equações (n = 2), o sistema é indeterminado, apresentando infinitas soluções.

No entanto, todas as variáveis devem ser maiores ou iguais a zero. Atribuir zero a uma variável significa não produzir um dos produtos (se a variável for x_1 ou x_2) ou utilizar toda a disponibilidade de recursos (se a variável for f_1 ou f_2). Desta forma, podemos encontrar soluções para o sistema de equações zerando duas variáveis (n - m = 2) e encontrando o valor para as duas variáveis restantes. Teremos que resolver então

$$C_4^2 = 4! / (2!\,2!) = 6$$

sistemas de equações lineares.

Uma vez resolvido um sistema, serão aplicados na função objetivo os valores encontrados. As variáveis zeradas são chamadas variáveis não-básicas. As variáveis cujos valores são calculados pelo sistema de equações são chamadas variáveis básicas.

c.1) Variáveis não-básicas: $x_1 = 0$

$x_2 = 0$

temos as variáveis básicas $f_1 = 12$

$f_2 = 8$

dando o lucro $z = 0$

c.2) Variáveis não-básicas: $x_1 = 0$

$f_1 = 0$

temos as variáveis básicas $x_2 = 4$

$f_2 = 4$

dando o lucro $z = 4$

c.3) Variáveis não-básicas: $x_1 = 0$

$f_2 = 0$

temos as variáveis básicas $x_2 = 8$

$f_1 = -12$

como $f_1 < 0$, a solução obtida é INVIÁVEL.

c.4) Variáveis não-básicas: $x_2 = 0$

$f_1 = 0$

temos as variáveis básicas $x_1 = 6$

$f_2 = -4$

como $f_2 < 0$, a solução obtida é INVIÁVEL.

c.5) Variáveis não-básicas: $x_2 = 0$

$f_2 = 0$

temos as variáveis básicas $x_1 = 4$

$f_1 = 4$

dando o lucro $z = 16$

c.6) Variáveis não-básicas: $f_1 = 0$

$f_2 = 0$

temos as variáveis básicas $x_1 = 3$

$x_2 = 2$

dando o lucro $z = 14$

Comparando todas as soluções encontradas por este processo, achamos a solução ótima, ou seja, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $f_1 = 4$, $f_2 = 0$, dando um lucro $z = 16$.

4.2 Desenvolvimento do Método Simplex

Da forma como foi resolvido o problema anteriormente, é necessário que muitos sistemas de equações sejam resolvidos e suas soluções comparadas. Para problemas reais de programação linear, esta solução se torna inviável. Desta forma, para termos condições de resolver um problema de programação linear, precisamos de uma sistemática que nos diga:

- ✓ qual o sistema de equações que deve ser resolvido;
- ✓ que o próximo sistema a ser resolvido fornecerá uma solução melhor que os anteriores;
- ✓ como identificar um solução ótima, uma vez que a tenhamos encontrado.

Essa sistemática é o método Simplex, e as regras que o método utiliza para atender às três questões acima são, basicamente, os critérios que desenvolvemos nos itens anteriores. Vamos voltar ao nosso pequeno problema, já com as variáveis de folga:

maximizar $z = 4\,x_1 + x_2$

sujeito a $2\,x_1 + 3\,x_2 + f_1 = 12$

$2\,x_1 + x_2 + f_2 = 8$

$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Vamos montar um quadro para ordenarmos as operações, colocando nele apenas os coeficientes das variáveis. No caso da função objetivo, vamos realizar a seguinte transformação:

de: $z = 4\,x_1 + x_2$

para: $z - 4\,x_1 - x_2 = 0$

Quadro 1

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	2	3	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
z	-4	-1	0	0	0

A última coluna corresponde aos termos independentes das equações, e a última linha contém os coeficientes das variáveis na função objetivo. Nessa última linha teremos sempre a contribuição que cada variável dá para o lucro total z, por unidade, em cada iteração do processo de solução. Essa última linha será chamada de função objetivo transformada, ou função z-transformada.

a) Solução inicial

A solução inicial para o problema será sempre obtida fazendo as variáveis originais do modelo (no caso x_1 e x_2) iguais a zero e achando o valor das demais.

Assim, fazendo $x_1 = x_2 = 0$ (variáveis não básicas), obtemos do Quadro 1:

$f_1 = 12$

$f_2 = 8$ (variáveis básicas)

$z = 0$

As variáveis básicas estão indicadas no Quadro 1, para facilitar o acompanhamento das operações.

b) Segunda solução

Como a primeira solução claramente não é a melhor, vamos procurar outra que dê um valor maior para z. O problema é descobrir:

- ✓ Das duas variáveis não básicas (nulas) na primeira solução, qual deve se tornar positiva?
- ✓ Das duas variáveis básicas (positivas) na primeira solução, qual deverá ser anulada?

Qual variável deverá se tornar positiva?

Vamos observar que na última linha do Quadro 1 temos os coeficientes da função objetivo que mostram a contribuição para o lucro z de cada unidade produzida de *mesa* (x_1) e de *armário* (x_2). Assim, aplicando o critério de que devemos produzir primeiro o produto que mais contribui para o lucro, vamos começar a produção pela variável x_1, já que sua contribuição unitária para o lucro (4) é maior que a contribuição de x_2, igual a 1.

Logo, a variável que deverá se tornar positiva é x_1.

Qual variável deverá ser anulada?

Nota-se pelo Quadro 1 que, na primeira equação, o maior valor possível de x_1 é 6, quando f_1 for igual a zero (note que x_2 vale zero por ser variável não básica). Qualquer valor maior de x_1 fará com que o valor de f_1 fique negativo, o que não é permitido. Na segunda equação, o maior valor permitido para x_1 é 4, quando f_2 for igual a zero. Analisando simultaneamente as duas equações, percebe-se que o maior valor possível para x_1 é 4, já que atende às duas equações.

Observe que esta análise pode ser feita diretamente do Quadro 1, através da divisão dos elementos da coluna b pelos correspondentes elementos da coluna x_1. O menor quociente indica, pela linha em que ocorreu, qual a variável básica que deve ser anulada. Assim, como o menor quociente é dado pela divisão 8 / 2 = 4, a variável básica a ser anulada é f_2, que é a variável positiva na atual solução, cujo valor foi encontrado na segunda linha.

Assim temos:

$x_2 = 0$

$f_2 = 0$

e o sistema restante deve ser resolvido para acharmos o valor de x_1 e f_1. A solução desse sistema será feita usando o Quadro 1 com as equações completas e usando as operações válidas com as linhas da matriz, como apresentado no Capítulo 2.

1ª operação: Dividir a segunda linha por 2 ($L_2 \leftarrow L_2 / 2$)

Quadro 1A

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	2	3	1	0	12
x_1	1	1/2	0	1/2	4
z	-4	-1	0	0	0

2ª operação: Multiplicar a segunda linha do Quadro 1A por (-2) e somar com a primeira linha do mesmo quadro, colocando o resultado na primeira linha ($L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_2$)

Quadro 1B

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
z	-4	-1	0	0	0

3ª operação: Multiplicar a segunda linha do Quadro 1B por (4) e somar com a terceira linha do mesmo quadro, colocando o resultado na terceira linha ($L_3 \leftarrow L_3 + 4\,L_2$)

Quadro 2

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
z	0	1	0	2	16

Como a última linha (função z-transformada) mostra as contribuições líquidas para o lucro, caso as variáveis x_1 e f_2 venha a ter seus valores aumentados de 0 para 1 e como estas contribuições têm seus valores trocados com relação ao quadro original, concluímos que a solução encontrada é ótima.

$x_1 = 4$,

$x_2 = 0$,

$f_1 = 4$,

$f_2 = 0$ e

$z = 16$

4.3 Procedimento do Método Simplex (Problemas de Maximização)

Passo 1: Introduzir as variáveis de folga; uma para cada desigualdade.

Passo 2: Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada.

Passo 3: Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga.

Passo 4: Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.

Passo 5: Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:

a) Dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. caso não haja elemento algum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.

b) O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.

Passo 6: Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.

Passo 7: Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

4.4 Outro Exemplo

Vamos resolver pelo método Simplex o problema das rações proposto no Capítulo 1, cujo modelo foi apresentado no Capítulo 3.

maximizar $Z = 11\,x_1 + 12\,x_2$

sujeito a: $x_1 + 4\,x_2 \leq 10000$

$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 30000$

$x_1, x_2 \geq 0$

a) Inclusão das variáveis de folga

Com a inclusão das variáveis de folga, o problema torna-se:

maximizar $Z = 11\,x_1 + 12\,x_2$

sujeito a: $x_1 + 4\,x_2 + f_1 \leq 10000$

$5\,x_1 + 2\,x_2 + f_2 \leq 30000$

$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

b) Solução inicial

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	1	4	1	0	10000
f_2	5	2	0	1	30000
z	-11	-12	0	0	0

c) Primeira iteração

Variável a entrar na base: x_2 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: f_1 (o quociente 10000/4 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_2, que vai entrar na base)

$L_1 \leftarrow L_1 / 4$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2 L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 12 L_1$

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	1/4	1	1/4	0	2500
f_2	4,5	0	-1/2	1	25000
z	-8	0	3	0	30000

d) Segunda iteração

Variável a entrar na base: x_1 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: f_2 (o quociente 25000/ 4,5 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_1, que vai entrar na base)

$L_2 \leftarrow L_2 / 4{,}5$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 / 4$

$L_3 \leftarrow L_3 + 8 L_2$

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	0	1	0,2778	-0,0556	1111,11
x_1	1	0	-0,1111	0,2222	5555,56
z	0	0	2,1111	1,7778	74444,44

e) Solução ótima encontrada

Como todos os valores da última linha (função z-transformada) são positivos ou nulos, concluímos que a solução encontrada é ótima, ou seja:

$x_1 = 5555{,}55$

$x_2 = 1111{,}11$

$z = 74444{,}44$

4.5 Aspectos Matemáticos Singulares

Na modelagem de um problema de programação linear, algumas situações específicas podem ocorrer, o que pode levar a casos em uma forma matemática diferente da apresentada até o momento. Entretanto, alguns artifícios matemáticos ajudam a reduzir o modelo obtido à forma padrão estudada. Estes artifícios são mostrados a seguir.

4.5.1 Minimização de uma função

A minimização de uma função $z(\mathbf{x})$ é matematicamente análoga à maximização da negativa desta função $(-z(\mathbf{x}))$.

Exemplo: minimizar $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$

é equivalente a

maximizar $z' = - c_1 x_1 - c_2 x_2 - ... - c_n x_n$

com $z' = - z$.

Essa é uma das formas de se resolver os problemas de minimização utilizando o mesmo algoritmo. Caso que queira resolver diretamente, devemos alterar o critério de entrada das variáveis na base. A variável que entra na base passa a ser aquela que tem o maior valor *positivo* na linha *z*-transformada. Caso todas tenham coeficientes negativos ou nulos, a solução obtida é ótima.

4.5.2 Restrições de limite inferior (≥)

Uma desigualdade em uma direção (≤ ou ≥) pode ser mudada para uma desigualdade na direção oposta, pela multiplicação de ambos os lados da desigualdade por (-1).

Exemplo: $a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$

é equivalente a

$- a_1 x_1 - a_2 x_2 \leq -b$

4.5.3 Restrições de igualdade

Uma equação pode ser substituída por duas desigualdades de direções opostas.

Exemplo: $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$

é equivalente a duas desigualdades simultâneas:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$

4.5.4 Variável irrestrita em sinal

Uma variável irrestrita em sinal (ou seja, que pode ser positiva, nula ou negativa) pode ser substituída pela diferença de duas variáveis não negativas.

Exemplo: se a variável x_1 for irrestrita em sinal, pode ser substituída pela diferença $(x'_1 - x''_1)$

com

$x'_1 \geq 0$ e $x''_1 \geq 0$.

4.6 Método Simplex em Duas Fases

O Método Simplex utiliza uma solução inicial viável para começar o processo iterativo, trabalhando sempre dentro da região viável. Nos casos apresentados até o presente momento, a solução $x_i = 0$, para $i = 1, ..., n$ era uma solução viável, já que todas as restrições apresentadas foram do tipo (≤). Quando as restrições são do tipo (=) ou (≥), esta solução não existe.

Seja o exemplo abaixo:

minimizar $z = 10\, x_1 + 4\, x_2 + 5\, x_3$

sujeito a: $8\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 \geq 10$

$4\, x_1 + 3\, x_2 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Como temos uma restrição do tipo (≥), a variável de folga deve ter coeficiente negativo, tendo o significado de uma variável de excesso. O problema transformado é:

minimizar $z = 10\, x_1 + 4\, x_2 + 5\, x_3$

sujeito a: $8\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 - f_1 = 10$

$4\, x_1 + 3\, x_2 + f_2 = 8$

$x_1, x_2, x_3, f_1, f_2 \geq 0$

onde f_1 é uma variável de excesso e f_2 é uma variável de folga.

Note que, pelo processo de solução anterior, a variável de excesso (f_1) passaria a ter valor negativo na solução inicial (-10), o que não é permitido. Assim, a solução $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ é inviável. É necessário então encontrar uma solução viável para que o método Simplex possa ser iniciado.

A forma de se resolver isto é inventando novas variáveis. Estas variáveis são chamadas de *variáveis artificiais*, e representadas por z_i. Será colocada uma variável artificial em cada restrição do modelo, ou seja:

$8\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 - f_1 + z_1 = 10$

$4\, x_1 + 3\, x_2 + f_2 + z_2 = 8$

$x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, z_1, z_2 \geq 0$

Como pode-se perceber, o problema com as restrições acima não é o mesmo problema, a não ser que todas as variáveis z_i sejam iguais a zero.

Desta forma, podemos resolver o problema em duas fases: na primeira fase, substituímos a função objetivo original por uma *função objetivo auxiliar*:

$$z_{aux} = - z_1 - z_2 = 12\, x_1 + 6\, x_2 + 4\, x_3 - f_1 + f_2 - 18$$

Nesse momento, aplicamos o método Simplex de forma a maximizar a função objetivo auxiliar, com as restrições contendo as variáveis auxiliares. A função objetivo auxiliar será maximizada quando todas as variáveis z_i forem iguais a zero, já que não podem conter valores negativos.

A primeira fase do problema, que consiste na maximização da função objetivo auxiliar, fornecerá uma solução viável para o problema original. A segunda fase consiste em resolver o problema original tomando como solução inicial os valores obtidos pela primeira fase para as variáveis x_i e f_i.

a) Solução inicial

Para resolver o problema, monta-se o quadro de forma semelhante à sistemática, colocando-se a função objetivo artificial na última linha. O quadro do exemplo fica:

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	z_1	z_2	b
z_1	8	3	4	-1	0	1	0	10
z_2	4	3	0	0	1	0	1	8
$z' = -z$	10	4	5	0	0	0	0	0
z_{aux}	-12	-6	-4	1	-1	0	0	-18

Obs. Como a função objetivo é de minimização, ele foi transformado em um problema de maximização através da multiplicação de todos os coeficientes por (-1).

A seguir, aplica-se o método Simplex normalmente, usando como função objetivo a última linha. Quando a solução ótima for atingida, dois casos podem ocorrer:

$z_{aux} = 0$: neste caso foi obtida uma solução básica do problema original e o processo de solução deve continuar, desprezando-se as variáveis artificiais e os elementos da última linha. É o início da segunda fase do processo.

$z_{aux} \neq 0$: neste caso o problema original não tem solução viável, o que significa que as restrições devem ser inconsistentes.

b) Fase 1 - Primeira iteração

Variável a entrar na base: x_1 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: z_1 (o quociente 10/8 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_1, que vai entrar na base)

$L_1 \leftarrow L_1 / 8$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4\, L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 10\, L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 + 12\, L_1$

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	z_1	z_2	b
x_1	1	3/8	1/2	-1/8	0	1/8	0	5/4
z_2	0	3/2	-2	1/2	1	-1/2	1	3
$z' = -z$	0	1/4	0	5/4	0	-5/4	0	-12,5
z_{aux}	0	-3/2	2	-1/2	-1	3/2	0	-3

c) Fase 1 - Segunda iteração

Variável a entrar na base: x_2 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: z_2 (o quociente 3/(3/2) é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_2, que vai entrar na base)

$L_2 \leftarrow 2\ L_2 / 3$

$L_1 \leftarrow L_1 - 3\ L_2 / 8$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 / 4$

$L_4 \leftarrow L_4 + 3\ L_2 / 2$

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	z_1	z_2	b
x_1	1	0	1	-1/4	-1/4	1/4	-1/4	1/2
x_2	0	1	-4/3	1/3	2/3	-1/3	2/3	2
$z' = -z$	0	0	1/3	7/6	-1/6	-7/6	1/6	-13
z_{aux}	0	0	0	0	0	1	1	0

Como na última linha o valor da função objetivo artificial é zero, a primeira fase terminou e a solução encontrada é a solução básica inicial para a segunda fase.

Removendo a última linha e as colunas referentes às variáveis artificiais, o quadro se torna

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	b
x_1	1	0	1	-1/4	-1/4	1/2
x_2	0	1	-4/3	1/3	2/3	2
$z' = -z$	0	0	1/3	7/6	-1/6	-13

d) Fase 2 - Primeira iteração

Variável a entrar na base: f_2 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: x_2 (o quociente 2/(2/3) é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_2, que vai entrar na base)

$L_2 \leftarrow 3\ L_2 / 2$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 / 4$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 / 6$

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	b
x_1	1	3/8	1/2	-1/8	0	5/4
x_2	0	3/2	-2	1/2	1	3
$z' = -z$	0	1/4	0	5/4	0	-12,5

e) Solução ótima encontrada

Como todos os valores da última linha (função z-transformada) são positivos ou nulos, concluímos que a solução encontrada é ótima, ou seja:

$x_1 = 1{,}25$

$x_2 = 0$

$z = -z' = 12{,}5$

CAPÍTULO 5

A FERRAMENTA SOLVER (EXCEL)

Diversas ferramentas para solução de problemas de otimização, comerciais ou acadêmicos, sejam eles lineares ou não, foram desenvolvidas. Dentre as ferramentas disponíveis, este curso se propõe a apresentar a ferramenta Solver, que acompanha o Microsoft Excel.

Apesar de a ferramenta Solver poder ser utilizada também para problemas de programação não-linear, neste curso será apresentada apenas a sua utilização para a solução de problemas de programação linear. A utilização para outros tipos de problemas segue o mesmo padrão, sendo por isso intuitivo ao usuário o seu aprendizado.

5.1 Definindo e Resolvendo um Problema

Inicialmente, devemos definir o problema na planilha do Excel. Vamos resolver como exemplo o problema da rações, do Capítulo 3. A formulação do problema é a seguinte:

maximizar $z = 11\,x_1 + 12\,x_2$

sujeito a: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 10000$

$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 30000$

$x_1, x_2 \geq 0$

Para definir o problema na planilha, devemos definir células para representar as variáveis de decisão e uma célula para representar o valor da função objetivo. Além disso, as restrições também devem ser definidas. Abra um novo arquivo no Microsoft Excel e siga os seguintes passos:

- ✓ na célula A1 digite "x1";
- ✓ na célula B1 digite "0";
- ✓ na célula A2 digite "x2";
- ✓ na célula B2 digite "0".

As células A2 e B2 guardarão os valores das variáveis de decisão x_1 e x_2, respectivamente.

Vamos agora definir a função objetivo. As equações do Excel são sempre precedidas do sinal de igualdade (=), que indica que nesta célula será efetuada uma conta. Preencha as células da planilha conforme indicado a seguir:

- ✓ na célula A4 digite "Função objetivo";
- ✓ na célula B4 digite "=11*B1+12*B2".

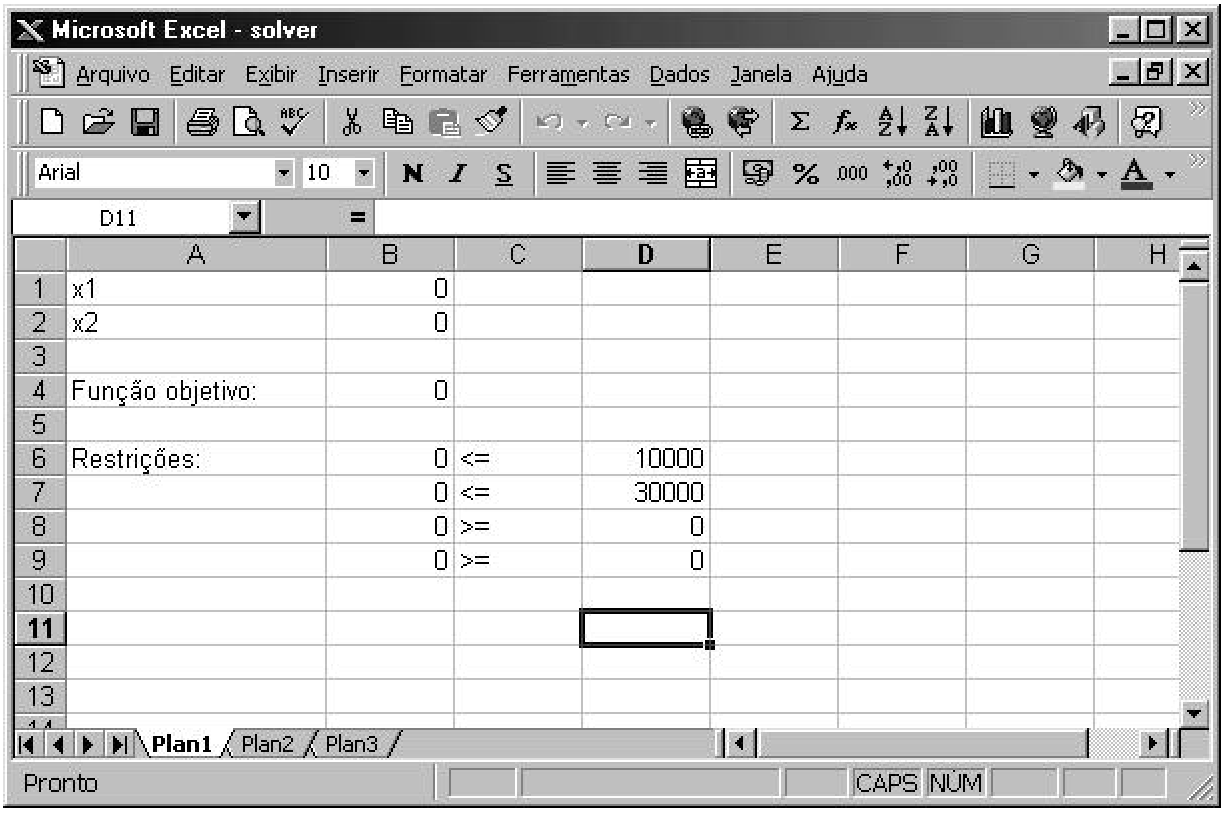
Na célula B4 será calculado automaticamente o valor da função objetivo, a partir da função fornecida. Qualquer alteração nos valores das células B1 ou B2 fará com que o valor da função objetivo seja recalculado.

Serão definidas agora as restrições do problema: As células de restrição devem ser preenchidas da seguinte forma:

- ✓ na célula A6 digite "Restrições";
- ✓ na célula B6 digite "= B1+4*B2";
- ✓ na célula C6 digite "<=";
- ✓ na célula D6 digite "10000";
- ✓ na célula B7 digite "= 5*B1+2*B2";
- ✓ na célula C7 digite "<=";
- ✓ na célula D7 digite "30000";
- ✓ na célula B8 digite "=B1 ";
- ✓ na célula C8 digite ">=";
- ✓ na célula D8 digite "0";
- ✓ na célula B9 digite "=B2";
- ✓ na célula C9 digite ">=";
- ✓ na célula D9 digite "0".

Após preenchidas as células, a planilha deve estar igual à apresentada na Figura 5.1.

Figura 5.1 - Planilha com as células preenchidas para utilização da ferramenta Solver.



Para otimizar a função objetivo, vamos utilizar a ferramenta Solver.

- ✓ No menu Ferramentas, clique em Solver. A janela apresentada na Figura 5.2 se abrirá.
- ✓ Na caixa "Definir célula de destino", selecione a célula da função objetivo (B4) clicando sobre ela, ou simplesmente digiteB4.
- ✓ Logo abaixo, é requerido que se escolha entre três opções: Máx, para maximizar a função objetivo, Mín, para minimizar a função objetivo, e Valor, que faz com que a função objetivo tenha determinado valor. No nosso exemplo, como queremos maximizar a função objetivo, escolheremos a opção Máx.
- ✓ Na caixa "Células variáveis", devem ser inseridas as células ajustáveis, que contêm os valores das variáveis de decisão. Deve-se inserir um nome ou uma referência para cada célula ajustável, separando as células não-adjacentes por ponto-e-vírgula. As células ajustáveis devem estar relacionadas direta ou indiretamente à célula que contém o valor da função objetivo. Podem ser especificadas até 200 células ajustáveis. Para que o Solver proponha automaticamente as células ajustáveis com base na célula de destino, clique em Estimar.
- ✓ Na caixa Submeter às restrições, devem ser inseridas as restrições do problema. Para inserir uma restrição, siga os seguintes passos:
  - clique no botão "Adicionar". A janela apresentada na Figura 5.3 se abrirá;
  - na caixa "Referência de célula", selecione a célula contendo a primeira restrição (B6);
  - na caixa de seleção, escolha a opção que corresponde ao tipo de restrição, que pode ser menor ou igual (<=), maior ou igual (>=), igual (=), valor inteiro (núm) ou valor binário (bin). No nosso caso a opção a ser escolhida é <=;
  - na caixa "Restrição", defina a célula que contém o valor limite da restrição, ou seja, D6;
  - clique em OK para adicionar a restrição;
  - repita estes passos até que todas as restrições estejam adicionadas.
- ✓ Após serem adicionadas as restrições, a janela deve estar igual à janela da Figura 5.2, exceto talvez pela presença dos cifrões ($), que indicam que a célula é fixa.

Figura 5.2 - Janela contendo os parâmetros da ferramenta Solver.

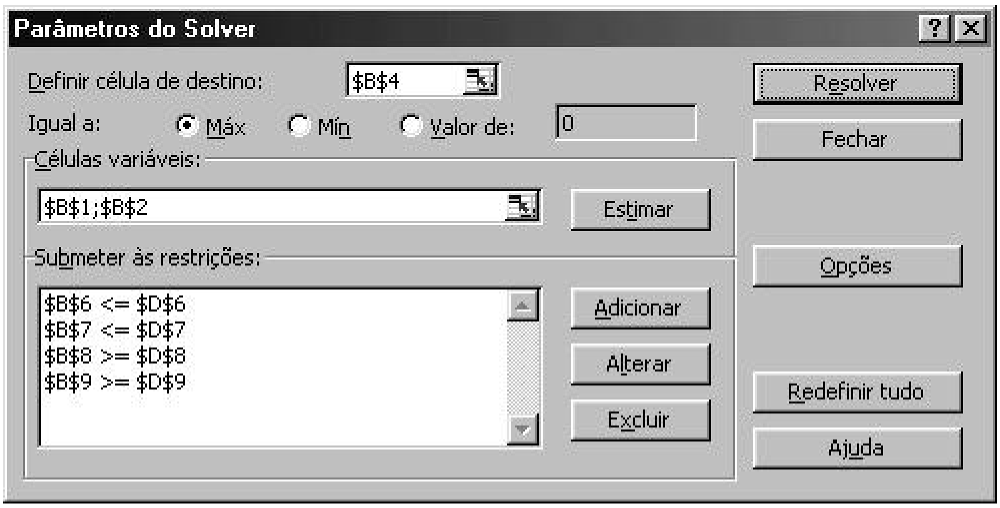
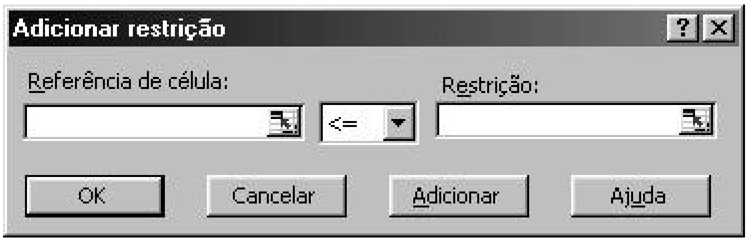
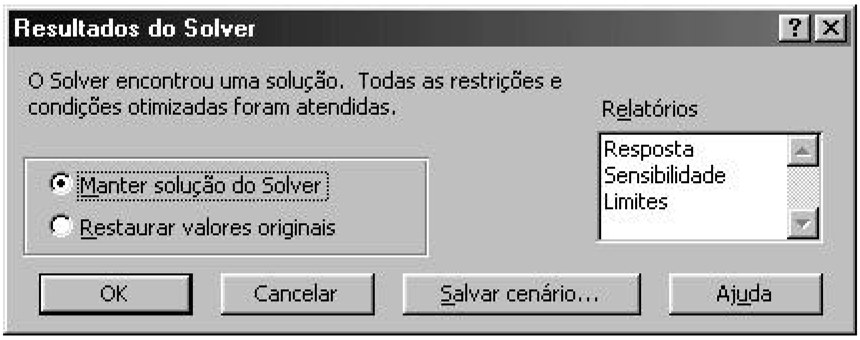


Figura 5.3 - Janela para adicionar restrições ao problema.



- ✓ Para resolver o problema, clique no botão "Resolver". Se tudo estiver correto, a janela da Figura 5.4 será apresentada. Nesta janela, podemos escolher entre manter a solução encontrada pelo Solver ou restaurar os valores originais. Também podemos selecionar relatórios, que contém informações sobre o processo de solução do problema.

Figura 5.4 - Janela de resultados do Solver.



O processo de solução pode ser interrompido pressionando-se ESC. O Microsoft Excel recalculará a planilha com os últimos valores encontrados para as células ajustáveis.

5.2 Instalando o Solver

Caso a opção Solver não esteja presente no menu Ferramentas, isto é porque a ferramenta Solver não foi instalada. Para instalá-la, proceda da seguinte maneira:

- ✓ No menu Ferramentas, clique em Suplementos. Se o Solver não estiver listado na caixa de diálogo Suplementos, clique em Procurar e localize a unidade de disco, a pasta e o nome de arquivo para o suplemento Solver.xla (geralmente localizado na pasta Biblioteca\Solver) ou execute o programa de instalação se não conseguir localizar o arquivo.
- ✓ Na caixa de diálogo Suplementos, marque a caixa de seleção Solver.

Os suplementos que você selecionar na caixa de diálogo Suplementos permanecerão ativos até que você os remova.

CAPÍTULO 6

O PROBLEMA DE TRANSPORTE

Um problema bastante comum que muitas vezes pode ser modelado como um problema de programação linear é o problema de transporte. Este problema envolve o transporte de alguma carga de diversas fontes a diversos pontos de destino. Dados o custo da distribuição entre cada fonte e destino, as produções das fontes e as capacidades dos destinos, pretende-se minimizar o custo total do transporte.

6.1 Um Exemplo de Problema de Transporte

Seja o processo de produção, transporte e depósito apresentado na Figura 6.1,

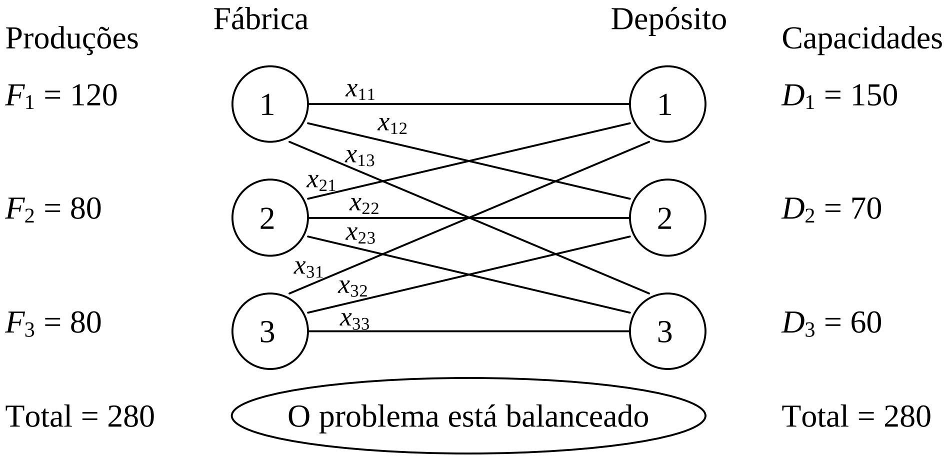


Figura 6.1 - Exemplo de um problema de transporte, com 3 fontes e 3 destinos

onde os custos de transporte c_{ij}, da fonte i para o destino j são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Custos unitários de transporte para o exemplo de problema de transporte

Custos (c_{ij})	**Destinos (j)**		
Fontes (i)	**1**	**2**	**3**
1	8	5	6
2	15	10	12
3	3	9	10

Formulando o problema por programação linear, define-se como objetivo a minimização do custo total de transporte, ou seja:

minimizar: $z = 8\,x_{11} + 5\,x_{12} + 6\,x_{13} + 15\,x_{21} + 10\,x_{22} + 12\,x_{23} + 3\,x_{31} + 9\,x_{32} + 10\,x_{32}$

sujeito a

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 80 \\ x_{31} + x_{32} + x_{32} &= 80 \end{aligned}\right\}\ \text{restrições de produção}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \end{array}\right\} \text{ restrições de capacidade}$$

$x_{ij} \geq 0$ para $i = 1,2,3$ e $j = 1,2,3$ restrições de positividade

A solução do problema se torna mais cômoda se os dados forem representados em um quadro conforme a Figura 6.2.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	
Fonte 1	8 x_{11}	5 x_{12}	6 x_{13}	120
Fonte 2	15 x_{21}	10 x_{22}	12 x_{23}	80
Fonte 3	3 x_{31}	9 x_{32}	10 x_{33}	80
	150	70	60	Fornecimento
	Capacidade			

Figura 6.2 - Representação dos dados de um problema de transporte

6.2 Problema Clássico de Transporte

O problema de transporte pode ser apresentado de forma genérica da seguinte forma:

minimizar: $$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = F_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j$$

$x_{ij} \geq 0$ para $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$,

onde: c_{ij} = custo de distribuição entre a fonte i e o destino j;

x_{ij} = total a ser distribuído da fonte i até o destino j;

F_i = Total produzido pela fonte i;

D_j = total a ser armazenado pelo destino j.

Para que o problema tenha solução, ele deve estar balanceado, ou seja, devemos ter o total armazenado igual ao total da produção. Isso pode ser definido pela equação

$$\sum_{i=1}^{m} F_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \,.$$

O fato de o problema estar balanceado, faz com que uma das restrições seja redundante. Isto significa que o problema se reduzirá a ($m + n - 1$) restrições e (m x n) variáveis de decisão.

Como se trata de um problema típico de programação linear, ele pode ser resolvido pelo método Simplex. Entretanto, técnicas específicas para este tipo de problema podem resolvê-lo de forma mais rápida que o Simplex.

6.3 Método de Stepping-Stone

O método de stepping-stone chega à solução ótima partindo se uma solução inicial e pesquisando se alguma solução melhor pode ser obtida. Como o método parte de uma solução inicial, devemos encontrar uma solução viável qualquer para poder utilizar o método.

6.3.1 Solução inicial

Vamos utilizar como exemplo o problema apresentado na Seção 6.1. Para encontrar uma solução inicial, será utilizado o método do mínimo custo. Este método consiste nos seguintes passos:

- ✓ Atribuir o máximo possível à variável com menor custo unitário e preenche com zeros a linha ou coluna satisfeita. No exemplo, faz-se x_{31} = 80 já que c_{31} = 3, utilizando completamente o fornecimento da Fonte 3. Desta forma, x_{32} e x_{33} devem ser iguais a 0.
- ✓ Ajustar os elementos da linha ou coluna não ajustada a partir da variável com menor custo. Assim, no exemplo, na primeira coluna temos que fazer x_{11} = 70 (menor custo unitário), de forma a atender a capacidade do Destino 1. Logo, x_{21} deve ser igual a 0.
- ✓ O processo é repetido para as variáveis com outros custos, em ordem crescente. Dessa forma, devemos fazer x_{12} = 50, de forma a completar o fornecimento da Fonte 1, zerando assim a variável x_{13}. Para completar o quadro, devemos definir x_{22} = 20 (capacidade do Destino 2) e x_{23} = 60.

		Destino 1	Destino 2	Destino 3	Fornecimento
Fonte	1	8 70	5 50	6 0	120
	2	15 0	10 20	12 60	80
	3	3 80	9 0	10 0	80
	Capacidade	150	70	60	

6.3.2 Processo iterativo

Cada célula vazia representa uma variável não básica que poderia entra na base. Para entrar, a contribuição da variável não básica deve implicar a redução do custo total. Calculando essas contribuições para a célula x_{13}:

- ✓ Aloque 1 unidade a x_{13}. Assim, não é mais 60, mas 61 o total de unidades na coluna 3.
- ✓ Para não violar a restrição da coluna 3, uma unidade deverá ser subtraída de x_{23}, que passa a ter 59 unidades, e a coluna 3 com um total de 60 novamente.
- ✓ Agora a linha 2 totaliza 79 e não 80, o que pode ser corrigido com a adição de uma unidade a x_{22} (20 $\rightarrow$ 21).
- ✓ A coluna 2 fica então com um total de 71, o que pode ser corrigido com a subtração de uma unidade de x_{12}.
- ✓ A linha 1 é automaticamente corrigida em função do passo anterior.

Para cada variável zerada, devemos determinar um caminho fechado de forma a calcular a sua contribuição na função objetivo. Estes caminhos são definidos por linhas verticais ou horizontais, delimitando um polígono fechado. Apenas em um vértice deste polígono deve haver uma variável zerada, que é a própria variável não básica que será incluída na base. Só é possível formar um único caminho com essas características para cada variável zerada.

Encontrado o caminho mínimo da variável, sua contribuição é calculada alternando soma e subtração dos custos unitários dos vértices, começando da variável a ser incluída na base.

Vamos agora calcular a contribuição de cada variável não básica na função objetivo.

Variável	Caminho	Contribuição
x_{13}	$x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12}$	6 - 12 + 10 - 5 = -1
x_{21}	$x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11}$	15 - 10 + 5 - 8 = 2
x_{32}	$x_{32} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	9 - 5 + 8 - 3 = 9
x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	10 - 12 + 10 - 5 + 8 - 3 = 8

Como é um problema de minimização, a variável a entrar na base será aquela que contribui com o maior redução no valor da função objetivo, que é a variável x_{13}. O valor a ser alocado a esta célula deve ser o máximo, de modo que nenhuma das variáveis fique com valor negativo. Este valor é o menor valor das variáveis que estão nos vértices do caminho mínimo com sinal negativo. No caso, as variáveis com sinal negativo são x_{12} e x_{23}. Logo, o valor a ser alocado é 50.

As demais variáveis vão adicionar ou subtrair 50, conforme o sinal do vértice correspondente à variável seja positivo ou negativo. Ou seja, as variáveis passarão a ter os seguintes valores:

$x_{13} = 0 + 50 = 50;$

$x_{23} = 60 - 50 = 10;$

$x_{22} = 20 + 50 = 70;$

$x_{12} = 50 - 50 = 0.$

Logo, a variável que sai da base é x_{12}. A seguir, é apresentado o quadro após a primeira iteração.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Fornecimento
Fonte 1	8 70	5 0	6 50	120
Fonte 2	15 0	10 70	12 10	80
Fonte 3	3 80	9 0	10 0	80
Capacidade	150	70	60	

Recalculando as contribuições de cada variável não básica na função objetivo, temos que

Variável	Caminho	Contribuição
x_{12}	$x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22}$	5 - 6 + 12 - 10 = 1
x_{21}	$x_{21} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11}$	15 - 12 + 6 - 8 = 1
x_{32}	$x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	9 - 10 + 12 - 6 + 8 - 3 = 10
x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	10 - 6 + 8 - 3 = 9

Como todas as variáveis têm contribuição positiva, isto indica que a inclusão de qualquer uma delas fará aumentar o valor da função objetivo, portanto a solução encontrada é ótima.

6.4 Dificuldades do Problema de Transporte

6.4.1 Não balanceamento entre oferta e demanda

Caso isso ocorra, o problema não pode ser resolvido da maneira apresentada. Deve-se então criar uma origem ou destino fictício para que o problema esteja balanceado.

Para o problema inicial, se a produção total for maior que a capacidade total, criar um depósito fictício com capacidade = produção total - capacidade total, com custos de distribuição nulos. Se a produção total for menor que a capacidade total, criar uma fábrica fictícia.

Outra maneira de se resolver o problema seria tratar as restrições pertinentes não mais como equações e sim como inequações.

6.4.2 Soluções múltiplas

Ocorrem quando, detectada a solução ótima, um dos valores das contribuições for zero. O caminho fechado para a variável x_{ij} correspondente indicará a forma de obtenção da solução alternativa.

CAPÍTULO 7

ANÁLISE DE REDES

7.1 Conceitos Básicos em Teoria dos Grafos

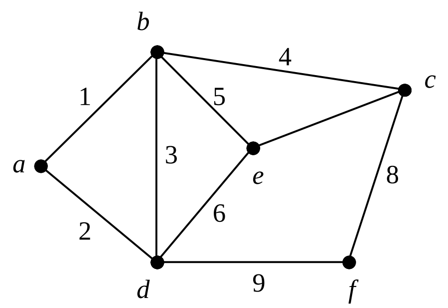
Diversos problemas de programação linear, inclusive os problemas de transporte, podem ser modelados como problemas de fluxo de redes. Algoritmos específicos para determinados tipos de problemas podem ser mais convenientes para a sua solução do que algoritmos mais genéricos.

Antes de continuar, serão apresentadas algumas definições da teoria dos grafos.

Definição 1

Um grafo linear consiste em diversos nós, ou pontos, sendo que cada nó deve estar conectado a um ou mais nós por arcos.

Um exemplo de um grafo linear é apresentado na Figura 7.1.



Nós: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* Arcos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Figura 7.1 - Exemplo de um grafo linear.

Definição 2

Um grafo direto (ou rede direta) é um grafo em que o fluxo ao longo de um arco pode ser efetuado apenas em um sentido.

Entretanto, pode-se substituir um arco com fluxo nos dois sentidos por dois arcos em sentidos opostos. Desta forma, podemos utilizar redes diretas sem que o modelo esteja perdendo a sua generalidade.

Definição 3

Um grafo bipartido é um grafo direto onde os nós são divididos em dois subconjuntos, onde todos os arcos do grafo ligam um nó de um subconjunto a um nó do outro.

Um grafo representando um problema de transporte é um exemplo de grafo bipartido, já que todos os arcos ligam nós das origens a nós dos destinos.

Definição 4

Um caminho ou canal é um conjunto ordenado de arcos que conectam dois nós através de nós intermediários, cada um dos quais estando exatamente em dois arcos do canal.

Um exemplo de canal no grafo da Figura 7.1 é o conjunto dos arcos 1, 5 e 7, que conectam os nós *a* e *c* através dos nós *b* e *e*.

Definição 5

Um grafo conectado é um grafo é um grafo no qual existe caminho entre qualquer par de nós.

O grafo da Figura 7.1 é um grafo conectado.

Definição 6

Um laço é um canal que conecta um nó a ele mesmo.

Os arcos 1, 5, 7, 8, 9 e 2 formam um laço conectando o nó *a* (ou qualquer outro nó do canal) a ele mesmo.

Definição 7

Uma árvore é um grafo conectado que não contém laços.

Exemplos de árvores no grafo da Figura 7.1 incluem os arcos 1, 3, 4, 6, 8 ou os arcos 2, 3, 4, 5, 8. O conjunto de arcos 1, 2, 3, 4, 7, 8 contém um laço (1, 2, 3), portanto não é uma árvore; o conjunto de arcos 1, 3, 7, 8, apesar de não conter laços, não forma uma árvore por não ser um grafo conectado. Pode ser provado que uma árvore com *n* nós possui (*n* - 1) arcos e há pelo menos dois extremos (nós em apenas um arco) em uma árvore.

7.2 Problema de Fluxo Máximo

Um problema de rede usual é a determinação do fluxo máximo entre dois pontos em uma rede. Considere o seguinte exemplo, adaptado de ZIONTS (1974).

"Um produtor de gás natural tem uma rede de tubulações conforme apresentado na Figura 7.2. As capacidades de cada parte da rede estão representadas em bilhões de litros por dia. Um problema ocorreu no ponto *t*, de modo que deseja-se fornecer a maior quantidade de gás possível da produção ao ponto *t*. Portanto, o problema é encontrar a máxima capacidade da rede entre *s* e *t* de modo que a máxima quantidade seja fornecida de *s* para *t*."

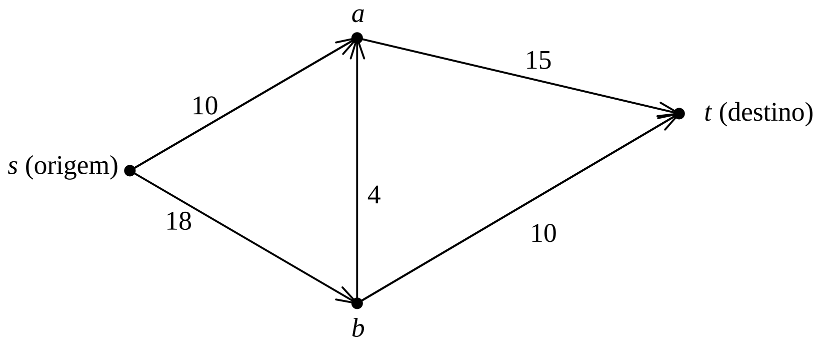


Figura 7.2 - Rede de tubulação de gás.

Mais formalmente, o problema a ser considerado é a maximização do escoamento de um nó *s* (chamado de origem) a um nó *t* (chamado de destino), sujeito às limitações das capacidades dos arcos.

Neste problema, podemos considerar que a quantidade de gás que chega no ponto *t* é igual à quantidade de gás que sai do ponto *s*. Isso pode ser representado por um arco ligando o ponto *t* ao ponto *s*. Desta forma, o problema pode ser representado como um problema de programação linear onde deseja-se maximizar o fluxo do nó *t* ao nó *s* (que é igual ao fluxo que sai do nó *s*, ou ao fluxo que chega no nó *t*). As restrições deste problema, além da capacidade de cada arco da rede, é o fato de que a quantidade de gás que chega em qualquer nó é igual à quantidade de gás que sai deste mesmo nó.

As variáveis de decisão para este problema são:

x_0: fluxo do nó *t* ao nó *s*;

x_1: fluxo do nó *s* ao nó *a*;

x_2: fluxo do nó *s* ao nó *b*;

x_3: fluxo do nó *a* ao nó *t*;

x_4: fluxo do nó *b* ao nó *a*;

x_5: fluxo do nó *b* ao nó *t*.

A função objetivo, a ser maximizada, é o fluxo que chega no nó *t*, representado neste problema por x_0.

Para cada nó, o fluxo de gás que chega é igual ao fluxo de gás que sai. Convencionando sinal negativo ao fluxo de gás que chega e positivo ao fluxo de gás que sai, temos as seguintes restrições:

nó *t*: $x_0 - x_3 - x_5 = 0$

nó *s*: $- x_0 + x1 + x_2 = 0$

nó *a*: $- x_1 + x_3 - x_4 = 0$

nó *b*: $- x_2 + x_4 + x_5 = 0$

As restrições de capacidade são $x_1 \leq 10$, $x_2 \leq 18$, $x_3 \leq 15$, $x_4 \leq 4$ e $x_5 \leq 10$.

O problema pode ser formulado então como apresentado a seguir.

maximizar $z = x_0$

sujeito a:

$$
\begin{array}{ccccccl}
x_0 & & & - x_3 & & - x_5 & = 0 \\
+ x_0 & + x_1 & + x_2 & & & & = 0 \\
& - x_1 & & + x_3 & - x_4 & & = 0 \\
& & - x_2 & & + x_4 & + x_5 & = 0 \\
& x_1 & & & & & \leq 10 \\
& & x_2 & & & & \leq 18 \\
& & & x_3 & & & \leq 15 \\
& & & & x_4 & & \leq 4 \\
& & & & & x_5 & \leq 10
\end{array}
$$

7.3 Problema de Caminho Mínimo

Um problema bastante comum envolvendo a teoria dos grafos é o problema de rota mais curta, ou caminho mínimo. Para cada arco de um grafo, define-se a distância que ele representa. O objetivo deste tipo de problema é encontrar o caminho mais curto entre dois nós. O problema do caminho mínimo pode ser utilizado também para representar custos ou tempos mínimos, em vez de distâncias.

O algoritmo para a solução de problemas de caminho mínimo que será estudado é o algoritmo de Dijkstra. Este algoritmo determina a distância mínima entre o vértice de origem (s) e os demais vértices.

Para melhor apresentar o algoritmo de Dijkstra, vamos analisar o grafo da Figura 7.3.

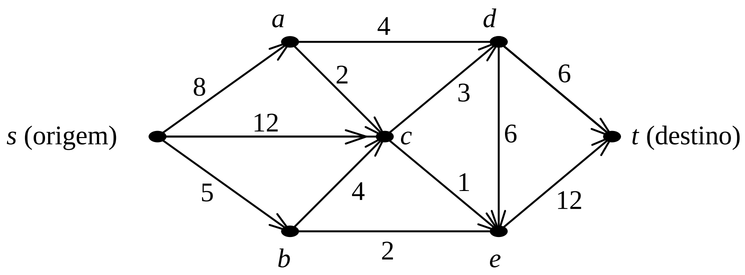


Figura 7.3 - Exemplo de grafo para o problema de caminho mínimo.

De forma a encontrar a rota mais curta, vamos montar duas tabelas. Na primeira (tabela de distâncias mínimas), são colocadas três colunas: o nome do nó, o nó de onde vem o caminho mínimo até o nó de origem e a distância do caminho mínimo. Na segunda (tabela auxiliar), são colocadas três colunas: o nome do nó, o nó de onde vem o caminho considerado (não necessariamente o mínimo) e a distância deste caminho.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.

Auxiliar

nó	ant.	dist.

O primeiro nó a ser analisado é o nó de origem. Sua distância ao nó de origem é 0. Este nó será então inserido na tabela de distâncias mínimas. Como o caminho mínimo para este nó não vem de nenhum outro nó, na segunda coluna será colocado apenas um traço.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0

Auxiliar

nó	ant.	dist.

Inserido um nó na primeira tabela, colocaremos na segunda tabela todos os nós atingidos por este nó. No nosso exemplo, os nós a serem inseridos são os nós *a*, *b* e *c*. Para estes nós, o nó de onde vem o caminho é o próprio nó *s*. A distância do nó de origem é a distância do arco percorrido somada com a distância do nó anterior até a origem. No caso, a distância do nó *s* é 0. A tabela auxiliar fica então da seguinte maneira.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0

Auxiliar

nó	ant.	dist.
a	*s*	8
b	*s*	5
c	*s*	12

O próximo nó a entrar na primeira tabela será o nó de menor distância até a origem. No caso, o nó a ser incluído é o nó *b*. Como na primeira tabela, o nó *b* ainda não foi inserido, podemos incluí-lo.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	
b	*s*	5	x
c	*s*	12	

Note que é marcado um X ao lado do nó na segunda tabela, indicando que este nó não deve mais ser considerado no teste de que nó entra na primeira tabela.

Os nós atingidos pelo nó *b* são os nós *c* e *e*, que devem ser inseridos na tabela auxiliar. A distância destes nós até a origem é encontrada somando-se a distância do arco com a distância mínima do nó *b* até a origem (mostrada na tabela de distâncias mínimas). Desta forma, as tabelas ficam da seguinte maneira.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	
b	*s*	5	x
c	*s*	12	
c	*b*	9	
e	*b*	7	

O próximo nó a entrar na primeira tabela é o nó *e*, vindo de *b*, com distância até a origem 7.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5
e	*b*	7

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	
b	*s*	5	x
c	*s*	12	
c	*b*	9	
e	*b*	7	x

Os único nó atingido por ele é o nó *t*.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5
e	*b*	7

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	
b	*s*	5	x
c	*s*	12	
c	*b*	9	
e	*b*	7	x
t	*e*	19	

O próximo nó a entra é o nó *a*, vindo de *s*, com distância até a origem de 8.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5
e	*b*	7
a	*s*	8

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	x
b	*s*	5	x
c	*s*	12	
c	*b*	9	
e	*b*	7	x
t	*e*	19	

Os nós atingidos pelo nó *a* são os nós *c* e *d*.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5
e	*b*	7
a	*s*	8

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	x
b	*s*	5	x
c	*s*	12	
c	*b*	9	
e	*b*	7	x
t	*e*	19	
c	*a*	10	
d	*a*	12	

O próximo nó a entrar é o nó *c*, vindo de *b*.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5
e	*b*	7
a	*s*	8
c	*b*	9

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	x
b	*s*	5	x
c	*s*	12	
c	*b*	9	x
e	*b*	7	x
t	*e*	19	
c	*a*	10	
d	*a*	12	

O nó *c* atinge os nós *d* e *e*.

Distâncias mínimas

nó	ant.	dist.
s	-	0
b	*s*	5
e	*b*	7
a	*s*	8
c	*b*	9

Auxiliar

nó	ant.	dist.	
a	*s*	8	x
b	*s*	5	x
c	*s*	12	
c	*b*	9	x
e	*b*	7	x
t	*e*	19	
c	*a*	10	
d	*a*	12	
d	*c*	12	
e	*c*	10	

O próximo nó a entrar é o nó *c*, vindo de *a*. Como o nó *c* já está incluído, marcamos ele com um X e passamos para o próximo, que é o nó *e* (vindo de *c*) que também já está incluído. O nó *c* (vindo de *s*) também já está incluído. O próximo nó que ainda não está incluído é o nó *d*, vindo de *a* ou de *c*, já que as duas distâncias são iguais.

Distâncias mínimas				Auxiliar			
nó	ant.	dist.		nó	ant.	dist.	
s	-	0		*a*	*s*	8	x
b	*s*	5		*b*	*s*	5	x
e	*b*	7		*c*	*s*	12	x
a	*s*	8		*c*	*b*	9	x
c	*b*	9		*e*	*b*	7	x
d	*a*	12		*t*	*e*	19	
				c	*a*	10	x
				d	*a*	12	x
				d	*c*	12	x
				e	*c*	10	x

Os nós atingidos pelo nó *d* são os nós *e* e *t*.

Distâncias mínimas				Auxiliar			
nó	ant.	dist.		nó	ant.	dist.	
s	-	0		*a*	*s*	8	x
b	*s*	5		*b*	*s*	5	x
e	*b*	7		*c*	*s*	12	x
a	*s*	8		*c*	*b*	9	x
c	*b*	9		*e*	*b*	7	x
d	*a*	12		*t*	*e*	19	
				c	*a*	10	x
				d	*a*	12	x
				d	*c*	12	x
				e	*c*	10	x
				e	*d*	18	
				t	*d*	18	

O nó *e* já está incluído; então o próximo nó a ser incluído é o nó *t*, vindo de *d*.

Distâncias mínimas				Auxiliar			
nó	ant.	dist.		nó	ant.	dist.	
s	-	0		*a*	*s*	8	x
b	*s*	5		*b*	*s*	5	x
e	*b*	7		*c*	*s*	12	x
a	*s*	8		*c*	*b*	9	x
c	*b*	9		*e*	*b*	7	x
d	*a*	12		*t*	*e*	19	
t	*d*	18		*c*	*a*	10	x
				d	*a*	12	x
				d	*c*	12	x
				e	*c*	10	x
				e	*d*	18	x
				t	*d*	18	x

Como todos os nós já foram incluídos na tabela de distâncias mínimas, o problema está resolvido. A tabela mostra, para cada nó do grafo, a distância mínima até o nó de origem. O caminho mínimo vem do nó indicado na coluna de nó anterior. Desta forma, pode-se determinar o caminho mínimo repetindo-se este passo sucessivamente até que o nó de origem seja encontrado. Para encontrarmos o caminho mínimo do nó *t*, por exemplo, pegamos o nó anterior a ele (*d*). O nó anterior ao nó *d* é o nó *a*, cujo nó anterior é o nó de origem (s).

Desta forma, o caminho mínimo da origem até o nó *t* é (*s* - *a* - *d* - *t*).

O algoritmo pode então ser definido da seguinte maneira:

Passo 1. Inserir o nó de origem na tabela de distâncias mínimas. Sua distância até o nó de origem é 0.

Passo 2. Colocamos na tabela auxiliar todos os nós atingidos por este nó. Para os nós incluídos na tabela auxiliar, o nó de onde vem o caminho é o nó recém inserido na tabela de distâncias mínimas. A distância do nó de origem é a distância do arco percorrido somada com a distância do nó recém inserido na tabela de distâncias mínimas até a origem.

Passo 3. O próximo nó a entrar na tabela de distâncias mínimas será o nó, entre os nós não marcados com um X, de menor distância até a origem. Marca-se este nó com um X. Caso este nó já esteja inserido na tabela de distâncias mínimas, devemos retornar ao passo 3.

Passo 4. Após inserir o nó na tabela de distâncias mínimas, volta-se ao passo 2 até que todos os nós do grafo tenham sido inseridos na tabela de distâncias mínimas.

Passo 5. A tabela de distâncias mínimas indica a distância do caminho mínimo de cada nó até o nó de origem, e o nó de onde vem o caminho mínimo.

Obs. 1: se todos os nós da tabela auxiliar já tiverem sido marcados e alguns nós ainda não tiverem sido incluídos na tabela de distância mínima, isto indica que não há caminho do nó de origem até os nós que não foram incluídos.

Obs. 2: o algoritmo de Dijkstra não é válido caso existam arcos com valores negativos.

CAPÍTULO 8

TEORIA DOS JOGOS

8.1 Introdução

Um jogo representa uma situação de competição ou conflito entre dois ou mais oponentes. Estes oponentes são usualmente chamados de *jogadores* (um jogador pode ser um time composto de mais de uma pessoa, como num jogo de cartas de duplas - buraco por exemplo - onde apesar de haver quatro pessoas, há apenas dois jogadores). Alguns exemplos de jogos são:

- ✓ jogos de salão, como cara-e-coroa, jogo da velha, damas ou xadrez;
- ✓ competição econômica;
- ✓ conflitos militares ou guerras.

Cada jogador tem um certo número de escolhas, finito ou infinito, chamadas de *estratégias*. Um jogador supostamente escolhe sua estratégia sem qualquer conhecimento prévio da estratégia escolhida pelos outros jogadores. A partir das escolhas dos jogadores, o jogo fornece o resultado, ou *saída*, definindo quanto cada jogador ganhou ou perdeu. Cada jogador faz sua escolha de modo a otimizar o resultado.

Os jogos são categorizados da seguinte maneira:

1. Tipos de saída

   a) Determinada - as saídas são precisamente definidas, dadas as estratégias tomadas.

   b) Probabilística - as probabilidades das diferentes saídas são conhecidas, dadas as estratégias tomadas.

   c) Indeterminada - as saídas possíveis são conhecidas dadas as estratégias tomadas, mas não suas probabilidades.

2. Número de jogadores

   a) Um jogador - estes jogos são chamados de jogos contra a natureza. Se a estratégia da natureza é determinada, o jogo é trivial; se a estratégia da natureza é probabilística, estes jogos são chamados de problemas de decisão; se é indeterminada, pode-se tratar o jogo como sendo de duas pessoas se for atribuída alguma perversidade à natureza.

   b) Dois jogadores.

   c) *n* jogadores (*n* maior que 2).

3. Natureza dos pagamentos

   a) Soma zero - a soma de todos os pagamentos é zero.

   b) Soma constante - a soma de todos os pagamentos é constante e diferente de zero.

   c) Soma variável - não há nenhuma relação entre os pagamentos dos jogadores.

4. Natureza da informação

a) Informação perfeita - conhecimento total de todos os movimentos anteriores.

b) Informação imperfeita.

8.2 Jogos de Dois Jogadores e Soma Zero

Dois jogadores e soma zero é o tipo de jogo mais estudado pela teoria dos jogos. De modo simplificado, neste tipo de jogo cada um dos dois jogadores escolhe uma entre suas estratégias possíveis. Uma vez que ambos os jogadores tenham tomado suas decisões, elas são anunciadas e uma tabela de pagamentos (conhecida anteriormente pelos dois jogadores) é utilizada para determinar o pagamento de um jogador ao outro.

A matriz abaixo representa o jogo. Nesta notação, a matriz representa o pagamento do jogador Y para o jogador X. Se o valor for negativo, o pagamento se dará do jogador X para o jogador Y.

		Y				
		D	E	F	G	Mínimos
	A	8	2	9	5	2
X	B	6	5	7	8	5
	C	7	3	-4	7	-4
Máximos		8	5	9	8	

O jogador X pode escolher entre as estratégias A, B e C. O jogador Y pode escolher entre D, E, F e G. O valor da matriz representa o valor a ser pago ao jogador X. Como é um jogo de duas pessoas e soma zero, um ganho do jogador X implica uma igual perda do jogador Y. Isto significa que se o jogador X escolher a estratégia A e o jogador Y escolher a estratégia G, o jogador X ganhará 9, ao passo que o jogador Y perderá os mesmos 9. Se o pagamento for negativo (por exemplo –4), o jogador X ganhará -4, ou seja, perderá 4, ao passo que o jogador Y ganhará 4.

Quando o jogador X escolhe a estratégia A, ele pode ganhar 8, 2, 9 ou 5, dependendo da estratégia escolhida pelo jogador Y. Ele pode garantir, entretanto, um ganho de pelo menos min{8, 2, 9, 5} = 2, independente da escolha do jogador Y. Da mesma maneira, se ele escolher a estratégia B, ele garante um ganho de min{6, 5, 7, 8} = 5 e se escolher a estratégia C, a pior hipótese é min{7, 3, -4, 7} = -4. Estes valores estão indicados à direita da matriz, chamados de mínimos. Se o jogador X selecionar a estratégia B, ele está maximizando seu menor ganho, dado por max{2, 5, -4} = 5. Esta seleção é denominada *maximin*, já que maximiza o mínimo ganho de cada opção. O valor resultante desta estratégia é chamado *valor maximin*.

O jogador Y, do outro lado, deseja minimizar suas perdas. Ele percebe que, se usar a estratégia D, não pode perder mais do que max{8, 6, 7} = 8. Para as demais estratégias, as máximas perdas estão apresentadas na matriz, como sendo o valor máximo de cada coluna. O jogador Y irá então escolher a alternativa que minimize sua máxima perda, que é a estratégia E, uma vez que min{8, 5, 9, 8} = 5. Esta seleção é denominada minimax, já que minimiza a máxima perda de cada opção. O valor resultante desta estratégia é chamado *valor minimax*.

Percebe-se que, para qualquer jogo de duas pessoas e soma zero, o valor minimax é sempre maior ou igual ao valor maximin. No caso de igualdade, as estratégias são chamadas estratégias ótimas e o jogo tem um ponto de sela. Este ponto é o ponto ótimo do jogo, e é igual ao valor maximin e ao valor minimax. O ponto é otimo, já que nenhum jogador mudará sua estratégia, uma vez que o resultado será pior caso o outro jogador mantenha a estratégia.

Em geral, o valor do jogo deve satisfazer a inequação

valor maximin ≤ valor do jogo ≤ valor minimax.

8.3 Estratégias Mistas

Na seção anterior, foi apresentado um jogo que continha um ponto de sela. Há casos, entretanto, nos quais este ponto de sela não existe. Como exemplo, é apresentada a matriz abaixo.

		Y: C	D	E	F	Mínimos
	A	2	1	2	0	0
X	B	-1	0	3	2	-1
Máximos		2	1	3	2	

Este jogo não possui um ponto de sela, e a estratégia minimax-maximin não é a estratégia ótima, uma vez que os jogadores podem melhorar seus resultados selecionando uma estratégia diferente. Neste caso, o jogo é *instável*.

Olhando para este jogo, percebe-se que algum tipo de troca de estratégias se faz necessária. Se X escolher entre as alternativas A e B de maneira sistemática (por exemplo, alternando entre A e B), esta troca sistemática será detectada pelo jogador Y. Então Y escolherá F quando X escolher A e C quando X escolher B. Um argumento similar serve para Y. Portanto, a variação da escolha entre as alternativas deve ter alguma aleatoriedade associada a ela. Suponhamos que o jogador X jogue uma moeda para saber se escolhe a alternativa A ou B. Chamaremos de p_A a probabilidade de escolher A e de p_B a probabilidade de escolher B. Os pagamentos esperados para uma estratégia aleatória são os seguintes:

C	D	E	F
$2\,p_A - p_B$	p_A	$2\,p_A + 3\,p_B$	$2\,p_B$

Ao jogar uma moeda, as probabilidades p_A e p_B são iguais, e valem 0,5. Neste caso, os pagamentos esperados são:

C	D	E	F
0,5	0,5	2,5	1,0

Entretanto, pode-se escolher uma estratégia que defina as probabilidades de modo a otimizar o resultado. Suponhamos que o jogador X deseje maximizar o menor pagamento vindo de Y. Designando este pagamento por u, o problema pode ser modelado como:

maximizar u

sujeito a $2\,p_A - p_B \le u$

$p_A \le u$

$2\,p_A + 3\,p_B \le u$

$2\,p_B \le u$

$p_A + p_B = 1$

$p_A, p_B \ge 0$

É conveniente rearrumar o modelo de modo a ter todas as variáveis do lado esquerdo das equações e inequações, ou seja:

maximizar u

sujeito a

$$2\,p_A - p_B - u \le 0$$
$$p_A - u \le 0$$
$$2\,p_A + 3\,p_B - u \le 0$$
$$2\,p_B - u \le 0$$
$$p_A + p_B = 1$$
$$p_A,\ p_B \ge 0$$

u irrestrito em sinal.

Em contrapartida, o jogador Y deseja variar entre suas alternativas de modo a minimizar o maior pagamento ao jogador X. As probabilidades da esclha das alternativas C, D, E e F são, respectivamente, q_C, q_D, q_E e q_F. Designando o pagamento ao jogador X por v, o problema pode ser modelado como:

minimizar v

sujeito a

$$\begin{aligned} 2\,q_C + q_D + 2\,q_E &\le v \\ -\,q_C + 3\,q_E + 2\,q_F &\le v \\ q_C + q_D + q_E + q_F &= 1 \\ q_C,\ q_D,\ q_E,\ q_F &\ge 0 \end{aligned}$$

O modelo pode ser rearrumado da mesma forma que o modelo referente ao jogador X.

Desta forma, ao serem definidas as probabilidades de cada alternativa, o jogador deve selecioná-las seguindo esta probabilidade, de modo aleatório, para que sua estratégia não seja detectada pelo outro jogador.

CAPÍTULO 9

RISCO E INCERTEZA

9.1 Conceito de Risco

Um fator que pode complicar bastante a solução de um problema de pesquisa operacional é a incerteza. Grande parte das decisões são tomadas baseando-se em algum tipo de previsão. Mesmo em casos nos quais não sejam necessárias previsões, outro fator complicador é a insuficiência de informações. Desta forma, torna-se importante uma análise do grau de incerteza existente no processo de decisão.

O risco pode ser definido "uma estimativa do grau de incerteza que se tem com respeito à realização de resultados futuros desejados" (ANDRADE, 2000). Desta forma, se a faixa de valores previsíveis para um determinado investimento for muito grande, o grau de risco do investimento também será elevado.

Para melhor ilustrar o conceito de risco, vamos analisar o seguinte problema:

"Uma empresa está em dúvida em relação a dois investimentos: o investimento A dá um retorno de $ 1000, com probabilidade de ocorrência de 100%; o investimento B pode oferecer retornos de $ 800 (30% de probabilidade), $ 1000 (40%) ou $ 1200 (30%)".

Ambos os investimentos fornecem um lucro médio de $ 1000, mas, enquanto que no investimento A o retorno de $ 1000 é garantido, no investimento B esta possibilidade é só de 40%. Em compensação, no investimento B existe a possibilidade de lucrar mais (30%) e também a possibilidade de lucrar menos (30%). Qual investimento a empresa deve escolher?

Este é um problema típico envolvendo risco. O risco é a probabilidade de haver variações nos resultados previstos, não importando se essas variações são para mais ou para menos. A preocupação com as incerteza é maior quando as variações podem trazer prejuízo ou frustrar determinado empreendimento.

9.2 Critérios para Decisão sob Condições de Incerteza

Em muitos casos, definir a probabilidade de ocorrência de possíveis eventos no futuro é uma tarefa bastante complicada. Esta definição, muitas vezes, é resultado da sensibilidade e experiência do profissional, sendo também interessante que os resultados atribuídos sejam comparados aos de outra pessoa, de forma a se chegar a um consenso sobre os graus de incerteza.

Uma vez atribuídos os graus de incerteza a cada alternativa, o analista se vê diante de um problema de escolha de uma alternativa, que poderá dar bons resultados se ocorrer um evento favorável, mas que poderá resultar em fracasso, caso uma situação desfavorável ocorra.

Será mostrado a seguir um exemplo, extraído de ANDRADE (2000), para apresentar alguns critérios que podem ajudar o analista a escolher determinada alternativa, levando em conta o conjunto de eventos possíveis de ocorrerem e os resultados esperados, associados aos eventos e às alternativas disponíveis.

> A Cia. ABXT-Produtos Eletrônicos Ltda. está considerando o lançamento de um auto-rádio e tem quatro opções de modelo: ST, LX, LS e GL, que diferem entre si no acabamento e características técnicas. Os lucros anuais que cada modelo pode fornecer são dependentes das

escalas de produção, que por sua vez são funções dos contratos com revendedores e fornecedores de peças e componentes. Os custos não variam uniformemente com as produções, já que a maioria dos componentes é comprada de fornecedores diferentes. Por outro lado, os preços dependem da aceitação do mercado. Nessa etapa do processo de planejamento, a empresa acredita que o lucro de cada alternativa irá depender da escala de produção e venda de cada tipo e, dessa forma, identificou quatro eventos que podem influenciar fundamentalmente os resultados finais. São eles:

- Evento 1: produção e venda de 50.000 auto-rádios por ano
- Evento 2: produção e venda de 70.000 auto-rádios por ano
- Evento 3: produção e venda de 90.000 auto-rádios por ano
- Evento 4: produção e venda de 100.000 auto-rádios por ano

É importante observar que a companhia não deseja, neste estado de análise do problema, realizar análises mais detalhadas de custo e mercado, como por exemplo entrar em contato com revendedores e fornecedores, para não gerar expectativas. Assim, deseja examinar o problema em caráter preliminar, de forma a obter elementos para discutir, mais tarde, com os demais interessados.

Para cada um dos eventos, os lucros esperados de cada modelo são fornecidos na tabela abaixo.

Tipo	Evento 1	Evento 2	Evento 3	Evento 4
ST	26	24	24	23
LX	27	28	22	20
LS	25	27	29	31
GL	26	26	26	26

9.2.1 Critério Maximin (ou Minimax)

O critério Maximin se baseia em uma visão pessimista do problema. Supõe-se que, escolhido um determinado modelo, ocorrerá o pior evento possível. A alternativa será escolhida como aquela que tem a melhor entre as piores opções de todas as alternativas. Em outras palavras, deve-se determinar o lucro mínimo para cada alternativa e, em seguida, escolher a alternativa com o maior lucro mínimo.

No caso em questão, os lucros mínimos para cada alternativa são os seguintes:

Tipo	Lucro mínimo
ST	23
LX	20
LS	25
GL	26

Desta forma, deve-se escolher produzir o modelo GL, uma vez que ele maximiza os lucros que podem vir a ocorrer na pior situação possível.

Por outro lado, se a decisão for tomada em cima de custos (ao invés de lucros), deve-se minimizar o custo máximo. Desta forma, deve-se adotar o critério análogo ao critério Maximin, que é o critério Minimax.

9.2.2 Critério Maximax (ou Minimin)

O critério Maximax se baseia em uma visão otimista do problema. Escolhido um determinado modelo, supõe-se que ocorrerá o melhor evento possível. A alternativa será escolhida como aquela que tem a melhor entre as melhores opções de todas as alternativas. Em outras palavras, deve-se determinar o lucro máximo para cada alternativa e, em seguida, escolher a alternativa com o maior lucro máximo.

No caso em questão, os lucros máximos para cada alternativa são os seguintes:

Tipo	Lucro máximo
ST	26
LX	28
LS	31
GL	26

Desta forma, deve-se escolher produzir o modelo LS, uma vez que ele maximiza os lucros que podem vir a ocorrer na melhor situação possível.

Da mesma forma, se a decisão for tomada em cima de custos, deve-se minimizar o custo mínimo. Utiliza-se então o critério análogo ao critério Maximax, que é o critério Minimin.

9.2.3 Critério de Hurwicz

Este critério é intermediário entre o mais pessimista (Maximin) e o mais otimista (Maximax). Dado um coeficiente de otimismo, v, o índice de cada alternativa é calculado de acordo com a formula abaixo.

$$x = v\, x_{max} + (1 - v)\, x_{min}.$$

onde x é o índice resultante relativo à alternativa considerada, x_{max} é o índice máximo da alternativa e x_{min} é o índice mínimo. No nosso exemplo, o índice considerado é o lucro de cada alternativa.

O índice de otimismo é um valor real entre 0 e 1, onde $v = 0$ indica pessimismo extremo (critério Maximin) e $v = 1$ indica otimismo extremo (critério Maximax).

No caso em questão, consideraremos $v = 0{,}5$. Os lucros máximos, mínimos e resultantes para cada alternativa são os seguintes:

Tipo	Lucro máximo	Lucro mínimo	Lucro resultante
ST	26	23	$26\,v + 23\,(1 - v) = 24{,}5$
LX	28	20	$28\,v + 20\,(1 - v) = 24$
LS	31	25	$31\,v + 25\,(1 - v) = 28$
GL	26	26	$26\,v + 26\,(1 - v) = 26$

As relações acima podem ser colocadas num gráfico, conforme a Figura 9.1, de forma a facilitar a visualização de como o coeficiente de otimismo afeta a decisão.

Pelo gráfico da Figura 9.1, podemos concluir que para valores de v entre 0 e 0,175 prevalece o rádio GL e para valores de v entre 0,175 e 1 prevalece a alternativa do rádio LS.

caso a decisão deva ser tomada tendo como base os custos, o critério de Hurwicz deve ser adaptado da seguinte forma:

$$x = v\, x_{min} + (1 - v)\, x_{max}..$$

Neste caso, a alternativa escolhida é a que dá o menor valor de x.

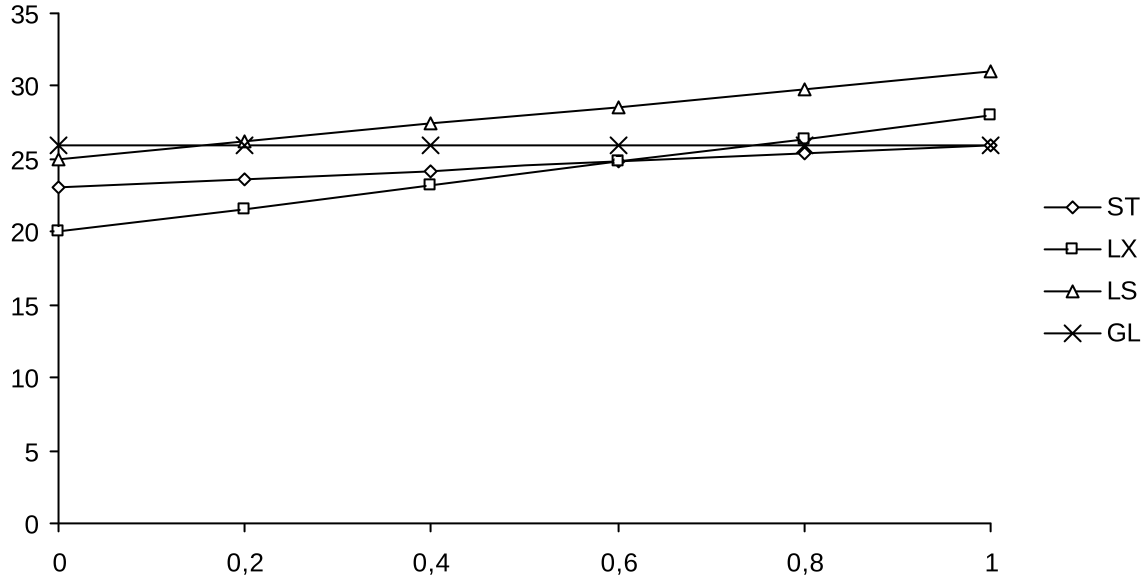


Figura 9.1 – Representação gráfica do critério de Hurwicz.

9.2.4 Critério de Savage

Este critério procura determinar o arrependimento máximo de cada escolha. Para montar a matriz de arrependimentos, determina-se o lucro máximo de cada evento. Para todos os eventos, calcula-se a diferença entre o lucro máximo e o lucro da alternativa em questão.

Considerando o caso em questão, para os eventos os lucros máximos são:

Evento	Lucro máximo
1	27 (alternativa LX)
2	28 (alternativa LX)
3	29 (alternativa LS)
4	31 (alternativa LS)

Monta-se então a matriz com as diferenças entre o lucro máximo e os lucros das alternativas.

Tipo	Evento 1	Evento 2	Evento 3	Evento 4
ST	27 - 26 = 1	28 - 24 = 4	29 - 24 = 5	31 - 23 = 8
LX	27 - 27 = 0	28 - 28 = 0	29 - 22 = 7	31 - 20 = 11
LS	27 - 25 = 2	28 - 27 = 1	29 - 29 = 0	31 - 31 = 0
GL	27 - 26 = 1	28 - 26 = 2	29 - 26 = 3	31 - 26 = 5

Para cada alternativa, o arrependimento máximo é:

Alternativa	Arrependimento
ST	8
LX	11
LS	2
GL	5

Pelo critério de Savage, a opção a ser escolhida é aquela que minimiza o arrependimento máximo. No caso, deve-se escolher a alternativa LS.

Para o caso de custos, a adaptação é simples, bastando fazer o arrependimento como a diferença entre o custo das alternativas e o custo mínimo.

9.2.5 Comparação Final

Não há razão alguma para que todos os critérios mostrados anteriormente forneçam soluções iguais. A escolha do critério a ser adotado depende de sensibilidade do analista e das condições específicas do problema. No exemplo, os resultados foram os seguintes.

Critério	Auto-rádio selecionado
Maximin	GL
Maximax	LS
Hurwicz	LS
Savage	LS

No caso, a alternativa LS parece ser a melhor, já que foi escolhida segundo o maior número de critérios e, mesmo segundo o critério sob o qual foi selecionado outra alternativa, a diferença no lucro para o modelo GL é pequena (25 contra 26).

O grande valor desses critérios está no fato de que eles procuram tornar objetivo um processo de decisão por natureza subjetivo, em face das incertezas que caracterizam os eventos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, E. L., 1998, *Introdução à Pesquisa Operacional*, LTC, Rio de Janeiro, Brasil.

BREGALDA, Paulo F., 1981, *Introdução à Programação Linear*, Campus, Rio de Janeiro, Brasil.

CAIXETA FILHO, José Vicente, 2001, *Pesquisa Operacional*, Atlas, São Paulo, Brasil.

COSTA, J. J. S., 1977, *Teoria da Decisão*, Editora Rio, Rio de Janeiro, Brasil.

MICROSOFT CORP., 1997, *Microsoft Excel Help*, Califórnia, EU.

PRESS, William H., TEUKOLSKY, Saul A., VETTERLING, William T., FLANNERY, Brian P., 1992, *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.

PUCCINI, A L., 1975, *Introdução à Programação Linear*, LTC, Rio de Janeiro, Brasil.

SHAMBLIN, James E., 1989, *Pesquisa Operacional*, Atlas, São Paulo, Brasil.

TAHA, Hamdy A., 1971, *Operations Research - An Introduction*, 2 ed., Collier-MacMillan Canada Ltd., Ontario, Canadá.

ZIONTS, Stanley, 1974, *Linear and Integer Programming*, Prentice-Hall Inc., Nova Jersey, EU.