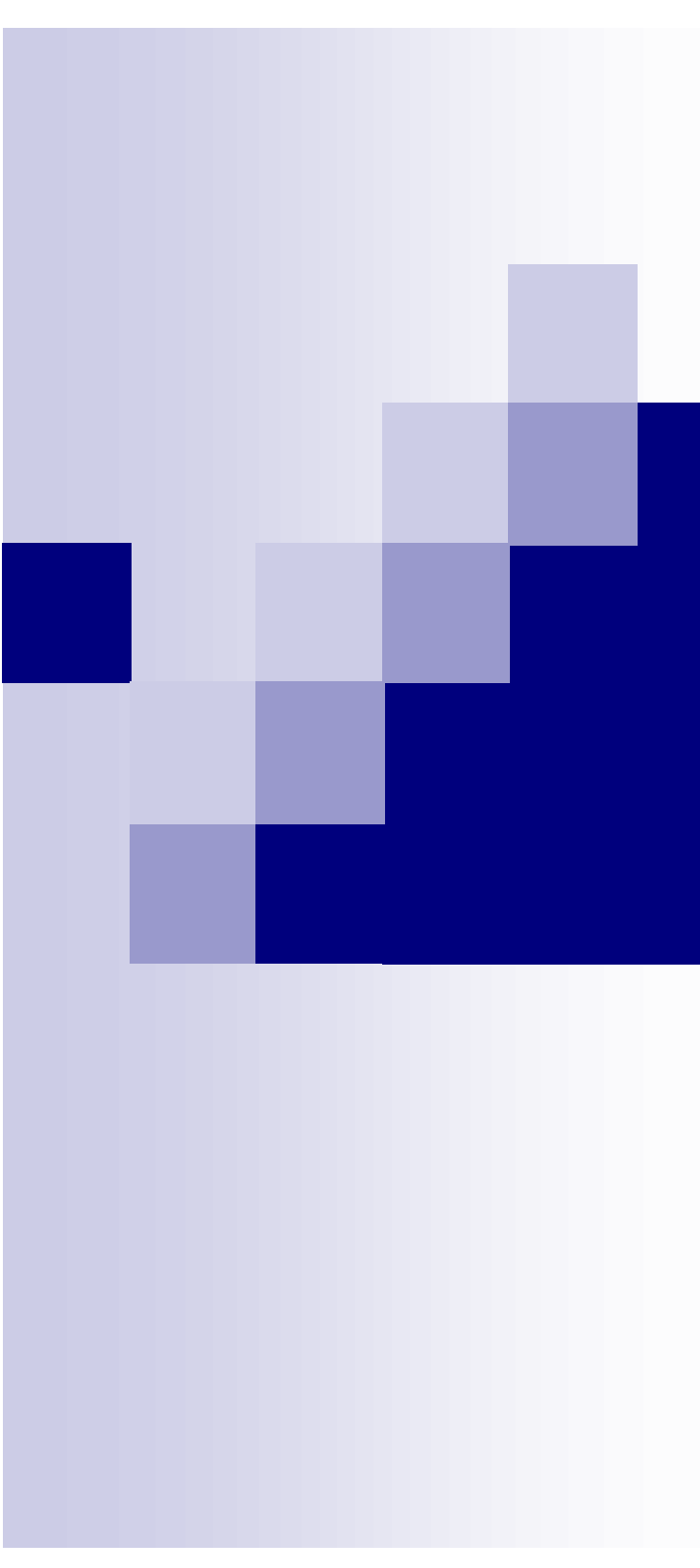


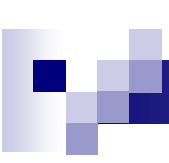


MOQ – 43 PESQUISA OPERACIONAL

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Programa do curso:

Semana 1: Apresentação da disciplina

Introdução à Programação Linear

Resolução de problemas de PL pelo Método Gráfico

Semana 2: Formulação em programação linear

Resolução computacional de problemas de PL

Semana 3: Resolução de problemas de PL pelo Método Simplex

Semana 4: Problemas com soluções iniciais (Método das 2 fases e o Big-M)

Semana 5: SBPO

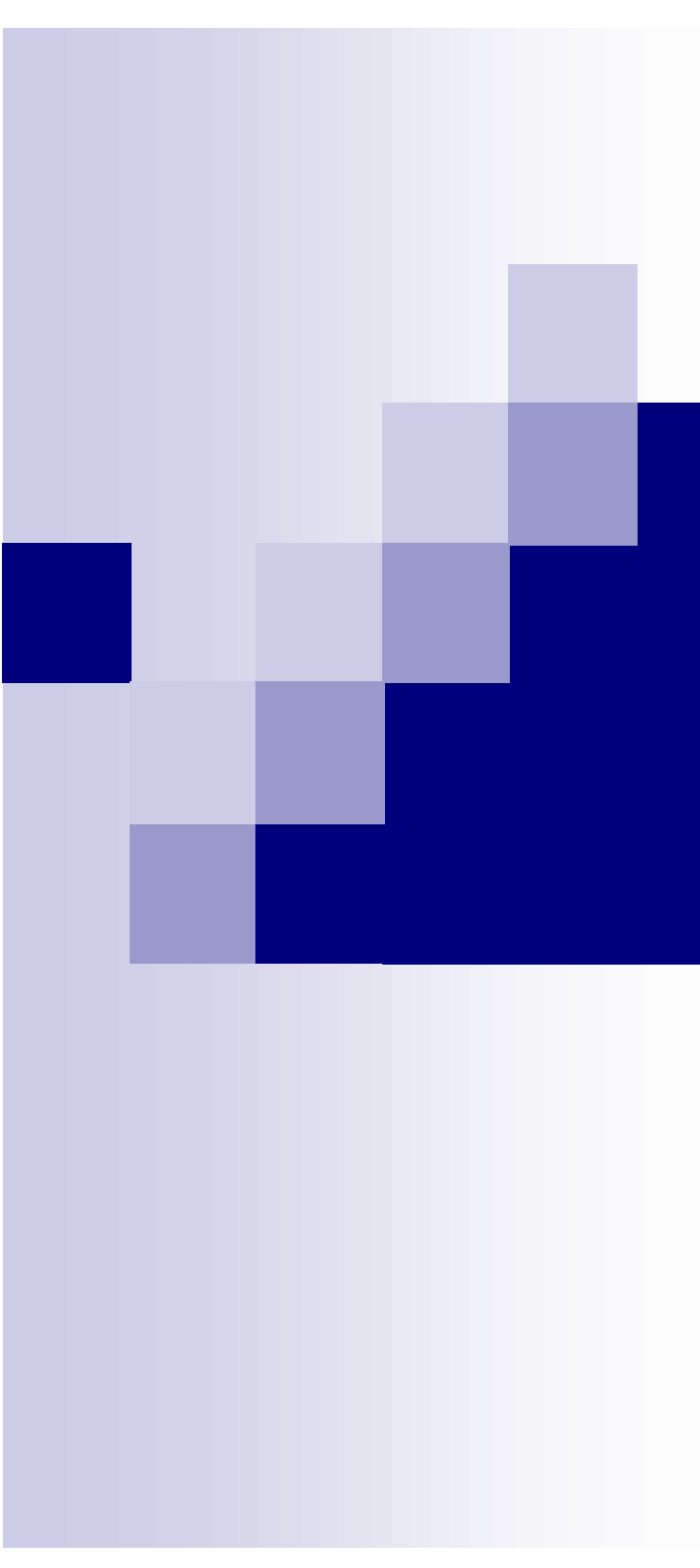
Semana 6: **Degeneração, Ciclismo e convergência do Método Simplex (2h)**

Semana 7: Prova 1

Feed-back Prova 1

Semana 8: **Programação por metas**

Entrega e correção do Trabalho 1



MOQ – 43 DEGENERACÃO, CICLISMO E CONVERGÊNCIA DO SIMPLEX

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo

Problema de mix de produção:

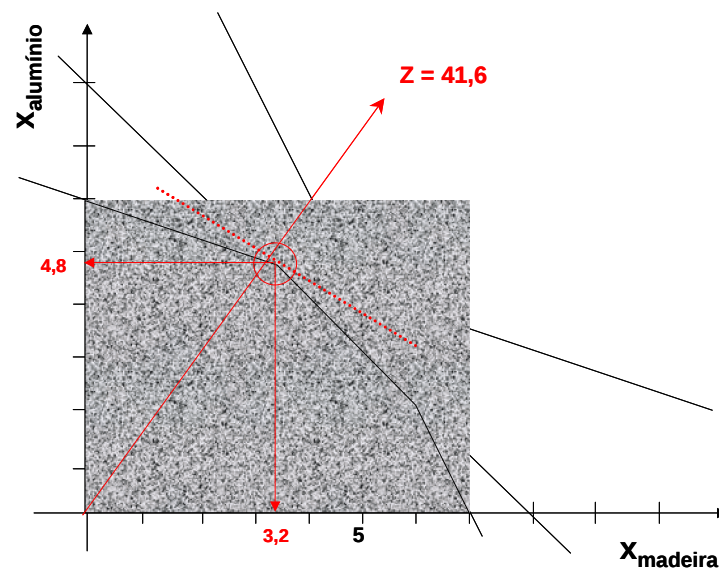
FO: Maximizar $Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$

S.A. $1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 24$

$3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 21$

$1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 8$

$x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} \geq 0$



Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	0	$4/5$	0	$14/5$	$208/5$
x_2	0	1	$2/5$	0	$-3/5$	$24/5$
x_4	0	0	$3/5$	1	$-39/10$	$21/5$
x_1	1	0	$-2/5$	0	$8/5$	$16/5$

→ Solução ótima:

x_1 (madeira) = 3,2

x_2 (alumínio) = 4,8

Lucro = $208/5 = 41,6$

OBS:

x_4 (folga montagem) = 4,2

Problema de mix de produção:

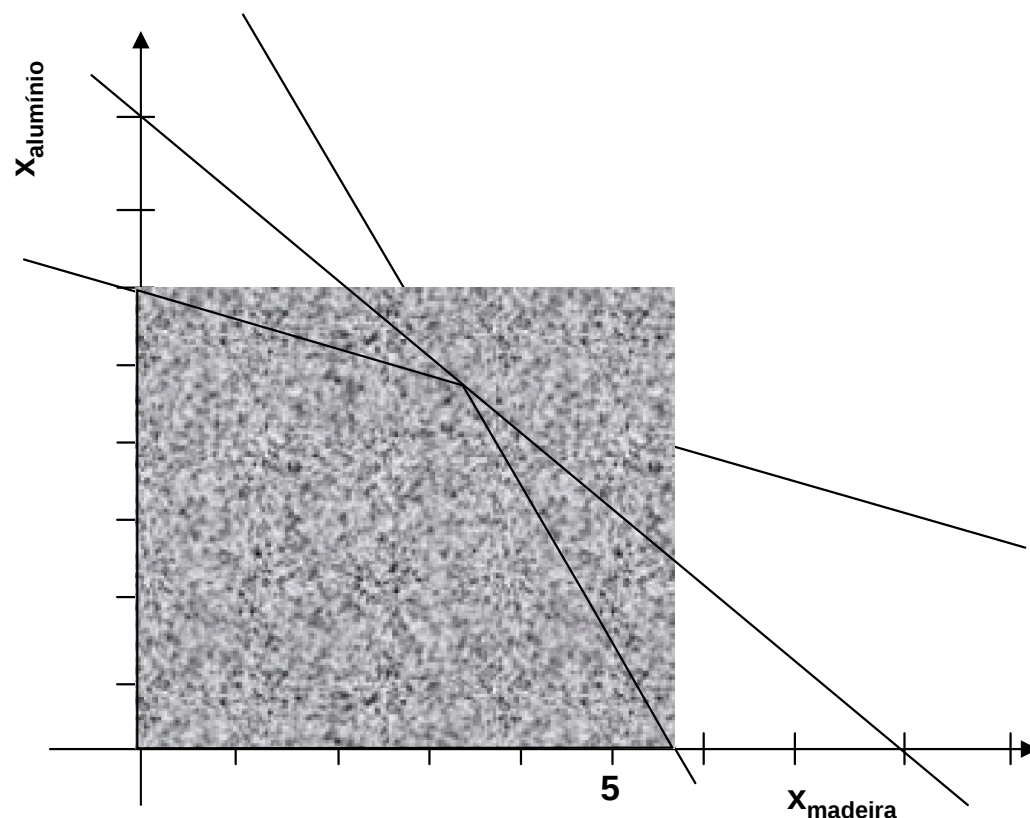
FO: Maximizar $Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$

S.A. $1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 24$

$3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 16,8$

$1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 8$

$x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} \geq 0$



Problema de mix de produção:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	-4	-6 ↓	0	0	0	0
x_3	1,5	4	1	0	0	24 →
x_4	3	3/2	0	1	0	16,8
x_5	1	1	0	0	1	8
Z	-7/4 ↓	0	3/2	0	0	36
x_2	3/8	1	-1/4	0	0	6
x_4	39/16	0	3/8	1	0	7,8
x_5	5/8	0	1/4	0	1	2

$$6 \cdot (8/3) = 16$$

$$7,8 \cdot (16/39) = 3,2$$

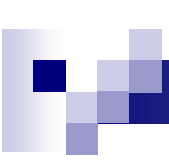
$$2 \cdot (8/5) = 3,2$$

OPÇÃO 1 →

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	0	0	4/5	0	14/5	208/5
x_2	0	1	-2/5	0	-3/5	24/5
x_4	0	0	-3/5	1	-39/10	0
x_1	1	0	2/5	0	8/5	16/5

OPÇÃO 2 →

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	0	0	23/13	28/39	0	208/5
x_2	0	1	-4/13	-2/13	0	24/5
x_1	1	0	2/13	16/39	0	16/5
x_5	0	0	-1/6	-10/39	1	0



Degeneração em programação linear:

- Definição: Um PPL é degenerado se há pelo menos uma solução básica viável com uma variável básica com valor zero ($=0$). Se há, essa solução é uma solução básica viável degenerada.
- A degeneração ocorre quando há empate na saída (regra da razão).
- Consequências da degeneração:
 - Se um PPL é degenerado o simplex pode apresentar inconsistências.
 - Se um PPL tem muitas soluções básicas viáveis degeneradas o simplex costuma ser ineficiente.
 - Se um PPL é degenerado pode haver ciclismo, o que pode interferir na convergência do algoritmo.

Exemplo de PPL degenerado, inconsistente e ineficiente:

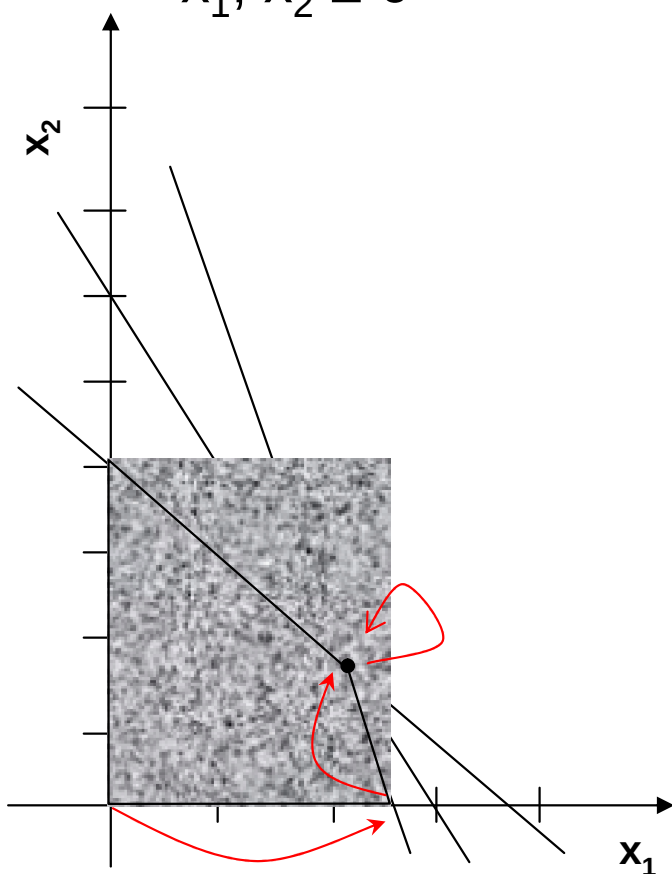
FO: $\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$

S.A. $4x_1 + 2x_2 \leq 12$

$4x_1 + 1x_2 \leq 10$

$1x_1 + 1x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	-5↓	-3	0	0	0	0
x_3	4	2	1	0	0	12
x_4	4	1	0	1	0	10
x_5	1	1	0	0	1	4
Z	0	-7/4↓	0	5/4	0	25/2
x_3	0	1	1	-1	0	2 →
x_1	1	1/4	0	1/4	0	5/2
x_5	0	3/4	0	1/4	1	3/2 →
Z	0	0	7/4	-1/2↓	0	16
x_2	0	1	1	-1	0	2
x_1	1	0	-1/4	1/2	0	2
x_5	0	0	-3/4	1/2	1	0 →
Z	0	0	1	0	1	16
x_2	0	1	-1/2	0	2	2
x_1	1	0	1/2	0	-1	2
x_4	0	0	-3/2	1	2	0

Exemplo de ciclismo:

FO: Min $-\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4$

S.A. $\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$

$\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 7x_4 \leq 0$

$x_3 \leq 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	$\frac{3}{4} \downarrow$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0	0	0	0
x_5	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	1	0	0	0 $\rightarrow$
x_6	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0	1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
Z	0	$4 \downarrow$	$\frac{7}{2}$	-33	-3	0	0	0
x_1	1	-32	-4	36	4	0	0	0
x_6	0	4	$\frac{3}{2}$	-15	-2	1	0	0 $\rightarrow$
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
Z	0	0	$2 \downarrow$	-18	-1	-1	0	0
x_1	1	0	8	-84	-12	8	0	0 $\rightarrow$
x_2	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
Z	$-\frac{1}{4}$	0	0	$3 \downarrow$	2	-3	0	0
x_3	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	0
x_2	$-\frac{3}{64}$	1	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	0 $\rightarrow$
x_7	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	1	1
Z	$\frac{1}{2}$	-16	0	0	$1 \downarrow$	-1	0	0
x_3	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	2	-6	0	0 $\rightarrow$
x_4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
x_7	$\frac{5}{2}$	-56	0	0	-2	6	1	1
Z	$\frac{7}{4}$	-44	$-\frac{1}{2}$	0	0	$2 \downarrow$	0	0
x_5	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	1	-3	0	0
x_4	$\frac{1}{6}$	-4	$-\frac{1}{6}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0 $\rightarrow$
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
Z	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0	0	0	0
x_5	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	1	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0	1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1

Regra para prevenir o ciclismo:

➤ Regra Lexicográfica:

Passo principal:

Seja $z_k - c_k = \text{Max} \{z_j - c_j : j \in R\}$. Se $z_k - c_k \geq 0$ pare - a solução é ótima.

Caso contrário examine y_k .

Se $y_k \leq 0$ pare – a solução ótima é ilimitada.

Se $y_k > 0$ determine o índice r como:
$$r = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Minimo}} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Em caso de empate, deixará a base a variável com o menor y_{ik}

Atualize o tableau pivotando em y_{ik} (atualize as variáveis básicas e as não básicas com x_k que entra na base e x_i que sai).

Repita o passo principal

Exemplo de PPL degenerado, inconsistente:

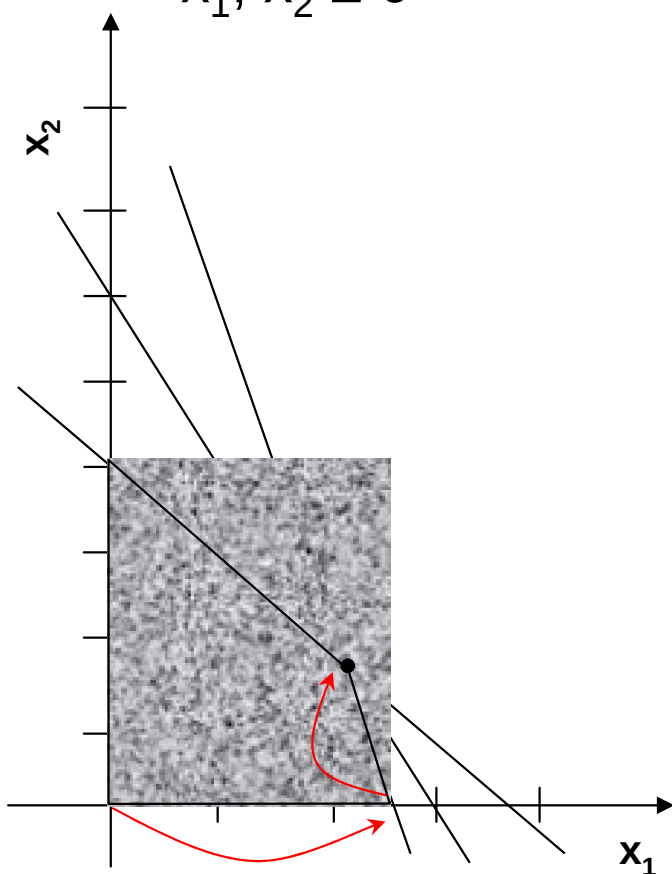
FO: $\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$

S.A. $4x_1 + 2x_2 \leq 12$

$4x_1 + 1x_2 \leq 10$

$1x_1 + 1x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	-5 ↓	-3	0	0	0	0
x_3	4	2	1	0	0	12
x_4	4	1	0	1	0	10 →
x_5	1	1	0	0	1	4
Z	0	-7/4 ↓	0	5/4	0	25/2
x_3	0	1	1	-1	0	2
x_1	1	1/4	0	1/4	0	5/2
x_5	0	3/4	0	1/4	1	3/2 →
Z	0	0	0	2/3	7/3	16
x_3	0	0	1	-2/3	-4/3	0
x_1	1	0	0	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	-1/3	4/3	2

Regra para prevenir o ciclismo:

➤ Regra de Brant:

Passo principal:

Seja $z_k - c_k = \text{Max (Min)} \{z_j - c_j : j \in R\}$. Se $z_k - c_k \geq (\leq) 0$ pare - a solução é ótima.

Caso contrário examine y_k .

Se $y_k \leq 0$ pare – a solução ótima é ilimitada.

Se $y_k > 0$ determine o índice r como:
$$r = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Minimo}} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Em caso de empate, deixará a base a variável com o menor (maior) y_{ik}

Atualize o tableau pivotando em y_{ik} (atualize as variáveis básicas e as não básicas com x_k que entra na base e x_i que sai).

Repita o passo principal

Exemplo de PPL degenerado, inconsistente:

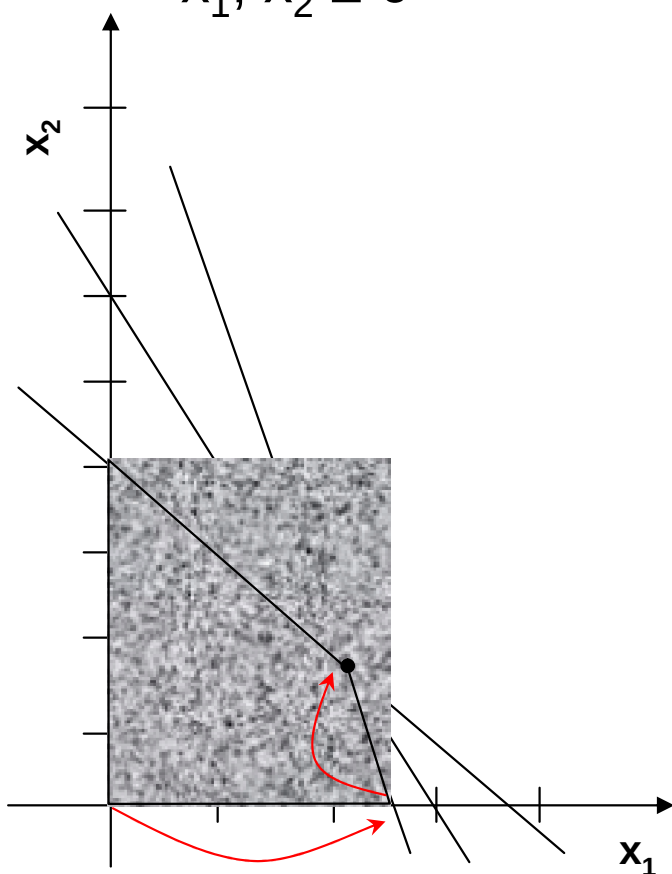
FO: $\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2$

S.A. $4x_1 + 2x_2 \leq 12$

$4x_1 + 1x_2 \leq 10$

$1x_1 + 1x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	-5 ↓	-3	0	0	0	0
x_3	4	2	1	0	0	12
x_4	4	1	0	1	0	10 →
x_5	1	1	0	0	1	4
Z	0	-7/4 ↓	0	5/4	0	25/2
x_3	0	1	1	-1	0	2
x_1	1	1/4	0	1/4	0	5/2
x_5	0	3/4	0	1/4	1	3/2 →
Z	0	0	0	2/3	7/3	16
x_3	0	0	1	-2/3	-4/3	0
x_1	1	0	0	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	-1/3	4/3	2

Exemplo de ciclismo:

FO: $\text{Min } -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4$

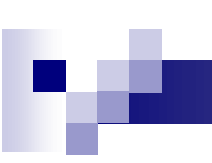
S.A. $\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 = 0$

$\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 7x_4 = 0$

$x_3 \leq 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	$\frac{3}{4} \downarrow$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0	0	0	0
x_5	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	1	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0	1	0	0 $\rightarrow$
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
Z	0	-2	$\frac{5}{4} \downarrow$	$-\frac{21}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0
x_5	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_1	1	-24	-1	6	0	2	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1 $\rightarrow$
Z	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
x_5	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_1	1	-24	0	6	0	2	1	1
x_3	0	0	1	0	0	0	1	1



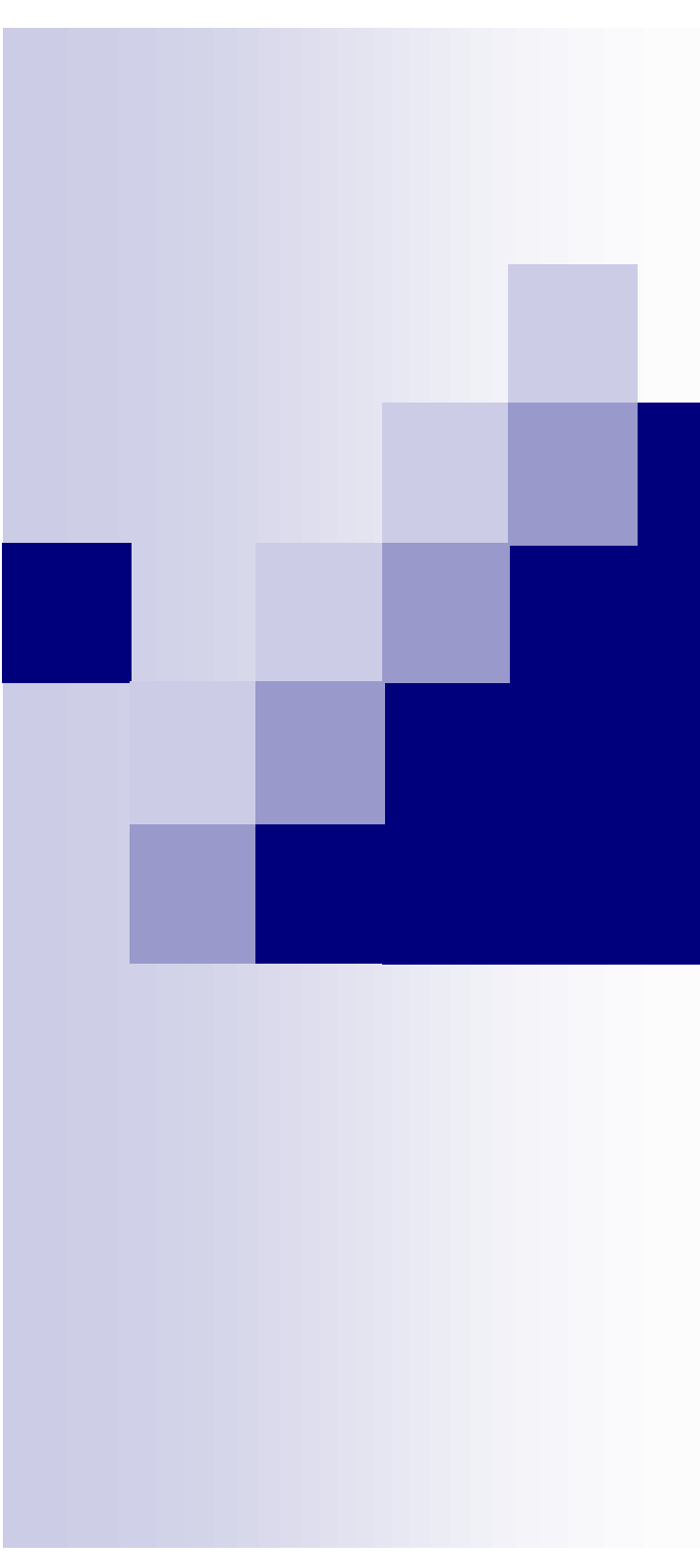
Convergência do método simplex:

- **Teorema:** se todas as soluções básicas viáveis de um PPL forem não degeneradas, o método simplex é finito.
- **Implicações:**
 - ✓ **Número máximo de soluções básicas viáveis:** $n! / (n-m)!m!$
 - ✓ **Na prática observa-se que o número máximo de iterações não passa de $3m/2$. Assim, este pode ser considerado um bom ponto de parada.**
 - ✓ **Como se houver degeneração, no caso extremo pode haver ciclismo, se houver degeneração o método simplex pode não ser finito.**



Alternativas:

- **Método dos pontos interiores**
- **Método dos elipsóides de Khachian**
- **Método projetivo de Karmarkar**



MOQ – 43 VARIÁVEIS IRRESTRITAS EM SINAL

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo

Método Simplex – Formalização:

Inicialização:

Encontrar uma solução básica viável (B).

Passo principal:

Seja $z_k - c_k = \text{Max (Min) } \{z_j - c_j : j \in R\}$. Se $z_k - c_k \geq (\leq) 0$ pare - a solução é ótima.

Caso contrário examine y_k .

Se $y_k \leq 0$ pare – a solução ótima é ilimitada.

Se $y_k > 0$ determine o índice r como:
$$r = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Minimo}} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Em caso de empate, deixará a base a variável com o menor (maior) y_{ik}

Atualize o tableau pivoteando em y_{ik} (atualize as variáveis básicas e as não básicas com x_k que entra na base e x_i que sai).

Repita o passo principal

Variáveis irrestritas em sinal:

- O problema de ter variáveis irrestritas em sinal, na utilização do método simplex para a resolução do PPL está no teste da razão.
- Para preservar o algoritmo a proposta é transformar a variável irrestrita em sinal. Assim:

$$\text{Não-negatividade: } x_j (\text{irrestrito}) \rightarrow x_j = x'_j - x''_j \quad x'_j, x''_j \geq 0$$

- Essa transformação viabiliza resolver, pelo método simplex, tanto o caso em que haja variáveis restritas em sinal quanto problemas de programação matemática que tem como função objetivo:

$$F.O. \text{ MAX / MIN } Z = \left| \sum_i c_i x_i \right|$$

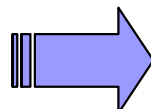
Exemplo:

FO: $\text{Max } Z = 30x_1 - 4x_2$

S.A. $5x_1 \leq 30 + x_2$

$x_1 \leq 5$

$x_1 \geq 0, x_2$ irrestr. sinal



FO: $\text{Max } Z = 30x_1 - 4x_2' + 4x_2''$

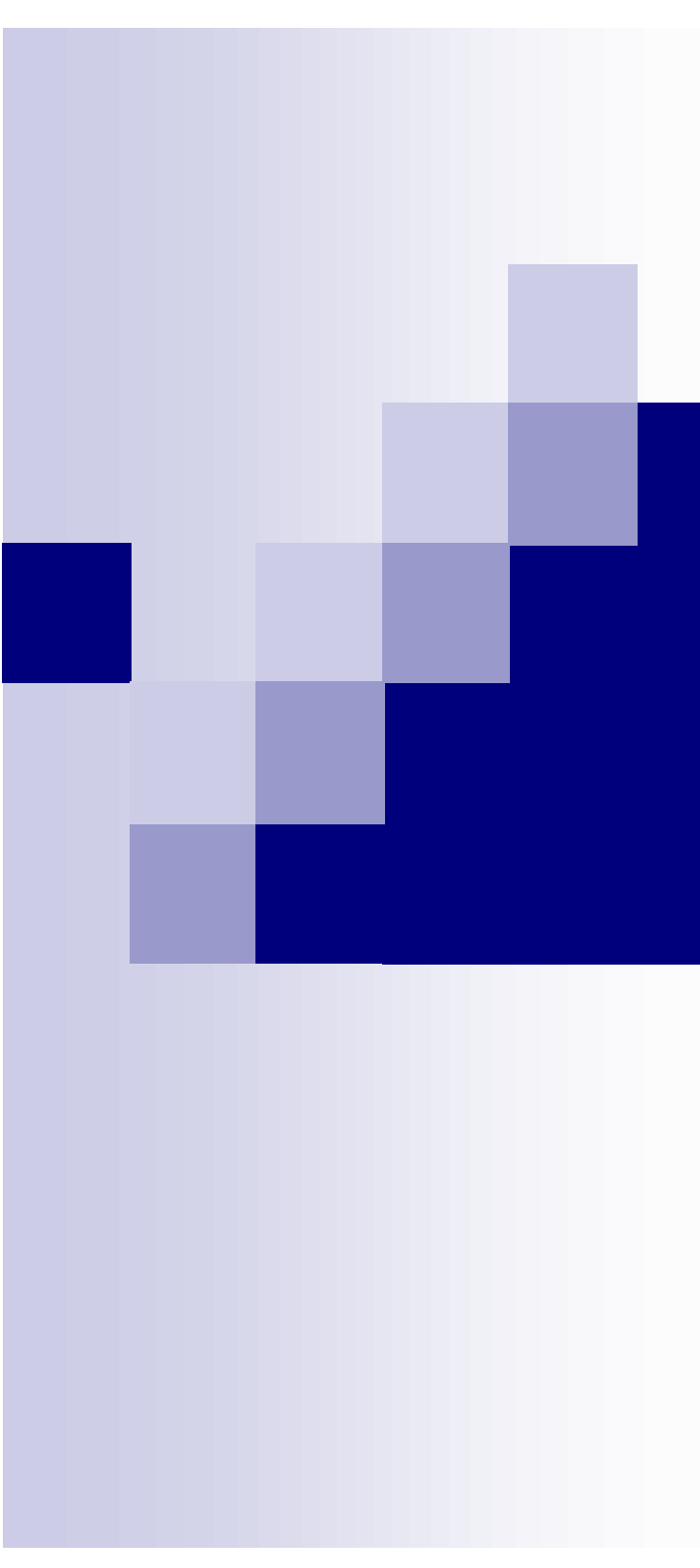
S.A. $5x_1 \leq 30 + x_2' - x_2''$

$x_1 \leq 5$

$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$

	x_1	x_2'	x_2''	x_3	x_4	RHS
Z	-30 ↓	4	-4	0	0	0
x_3	5	-1	1	1	0	30
x_4	1	0	0	0	1	5 →
Z	0	4	-4 ↓	0	30	150
x_3	0	-1	1	1	-5	5 →
x_1	1	0	0	0	1	5
Z	0	0	0	4	10	170
x_2''	0	-1	1	1	-5	5
x_1	1	0	0	0	1	5

Solução ótima: $Z=170$ $x_1 = 5$ $x_2 = -5$



MOQ – 43 GOAL PROGRAMMING (POR METAS)

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Goal programming (programação por metas):

- Definição: Goal programming é uma técnica utilizada quando o tomador de decisão enfrenta situações com múltiplos objetivos e não é possível encontrar uma solução, viável, que atenda todos esses objetivos, simultaneamente.

Problema do gasto com publicidade:

- Uma empresa de publicidade está tentando determinar quanto deve ser gasto em publicidade (TV) quando estiver passando novela e quando estiver passando futebol. Seu orçamento é de \$600.000 e suas metas são:
 - O anúncio deve ser visto por pelo menos 40 milhões de homens de alta renda (HIM).
 - O anúncio deve ser visto por pelo menos 60 milhões de pessoas de baixa renda (LIP).
 - O anúncio deve ser visto por pelo menos 35 milhões de mulheres de alta renda (HIW).

Os custos, por minuto, e a quantidade de pessoas atingidas, em milhões de pessoas por minuto de anúncio, são:

	Pessoas atingidas (milhões)			Custo (\$mil)
	HIM	LIP	HIW	
Novela	7	10	5	100
Futebol	3	5	4	60

Problema do gasto com publicidade:

FO: Max / Min $Z = ?x_{\text{novela}} + ?x_{\text{futebol}}$

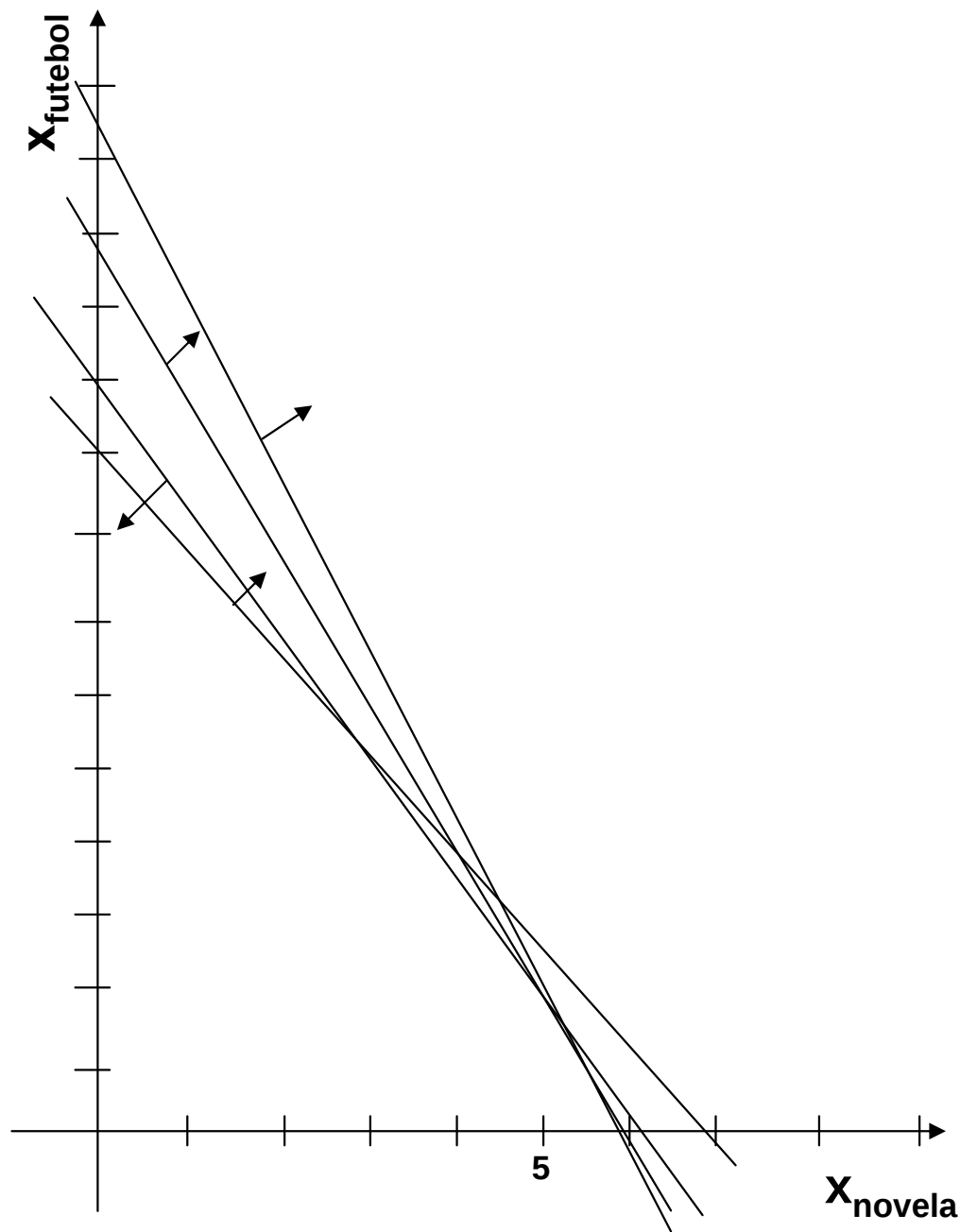
S.A. $7x_{\text{novela}} + 3x_{\text{futebol}} \geq 40$

$$10x_{\text{novela}} + 5x_{\text{futebol}} \geq 60$$

$$5x_{\text{novela}} + 4x_{\text{futebol}} \geq 35$$

$$100x_{\text{novela}} + 60x_{\text{futebol}} \leq 600$$

$$x_{\text{novela}}, x_{\text{futebol}} \geq 0$$



Problema do gasto com publicidade:

$$\text{FO: Min } Z = I_1 s_1^- + I_2 s_2^- + I_3 s_3^-$$

$$\text{S.A. } 7x_{\text{novela}} + 3x_{\text{futebol}} + s_1^- - s_1^+ = 40$$

$$10x_{\text{novela}} + 5x_{\text{futebol}} + s_2^- - s_2^+ = 60$$

$$5x_{\text{novela}} + 4x_{\text{futebol}} + s_3^- - s_3^+ = 35$$

$$100x_{\text{novela}} + 60x_{\text{futebol}} \leq 600$$

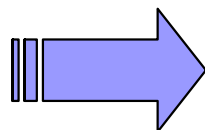
$$x_{\text{novela}}, x_{\text{futebol}}, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ \geq 0$$

No caso em que:

$$I_1 = 1000$$

$$I_2 = 1500$$

$$I_3 = 500$$



$$\mathbf{Z = 2.500}$$

$$s_1^- = 0 \quad \mathbf{X_{Novela} = 6}$$

$$s_2^- = 0 \quad \mathbf{X_{Futebol} = 0}$$

$$\mathbf{s_3^- = 5}$$

Problema do gasto com publicidade:

$$\text{FO: Min } Z = I_1 s_1^- + I_2 s_2^- + I_3 s_3^-$$

$$\text{S.A. } 7x_{\text{novela}} + 3x_{\text{futebol}} + s_1^- - s_1^+ = 40$$

$$10x_{\text{novela}} + 5x_{\text{futebol}} + s_2^- - s_2^+ = 60$$

$$5x_{\text{novela}} + 4x_{\text{futebol}} + s_3^- - s_3^+ = 35$$

$$100x_{\text{novela}} + 60x_{\text{futebol}} \leq 600$$

$$x_{\text{novela}}, x_{\text{futebol}}, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ \geq 0$$

ALTERNAT.	I1	I2	I3	NOVELA	FUTEBOL	S1-	S2-	S3-	HIM	LIP	HIW
1	1	1	1	5	1,67	0	1,67	3,33	40	58,3	31,7
2	1	2	1	6	0	0	0	5	40	60	30
3	1	2	2	5	1,67	0	1,67	3,33	40	58,3	31,7
4	1	2	3	5	1,67	0	1,67	3,33	40	58,3	31,7
5	1	5	10	3	5	4	5	0	36	55	35



Goal programming: limitações

- O uso da técnica depende da unidade das metas (devem estar na mesma unidade pois nem sempre é possível fazer sua padronização).
- Muitas vezes, é necessário arbitrar valores da importância de cada meta, o que pode deixar a técnica viesada.



Para casa:

- **Lista de Exercícios 5**
- **Leitura Winston: 4.11, 4.15 e 4.16**