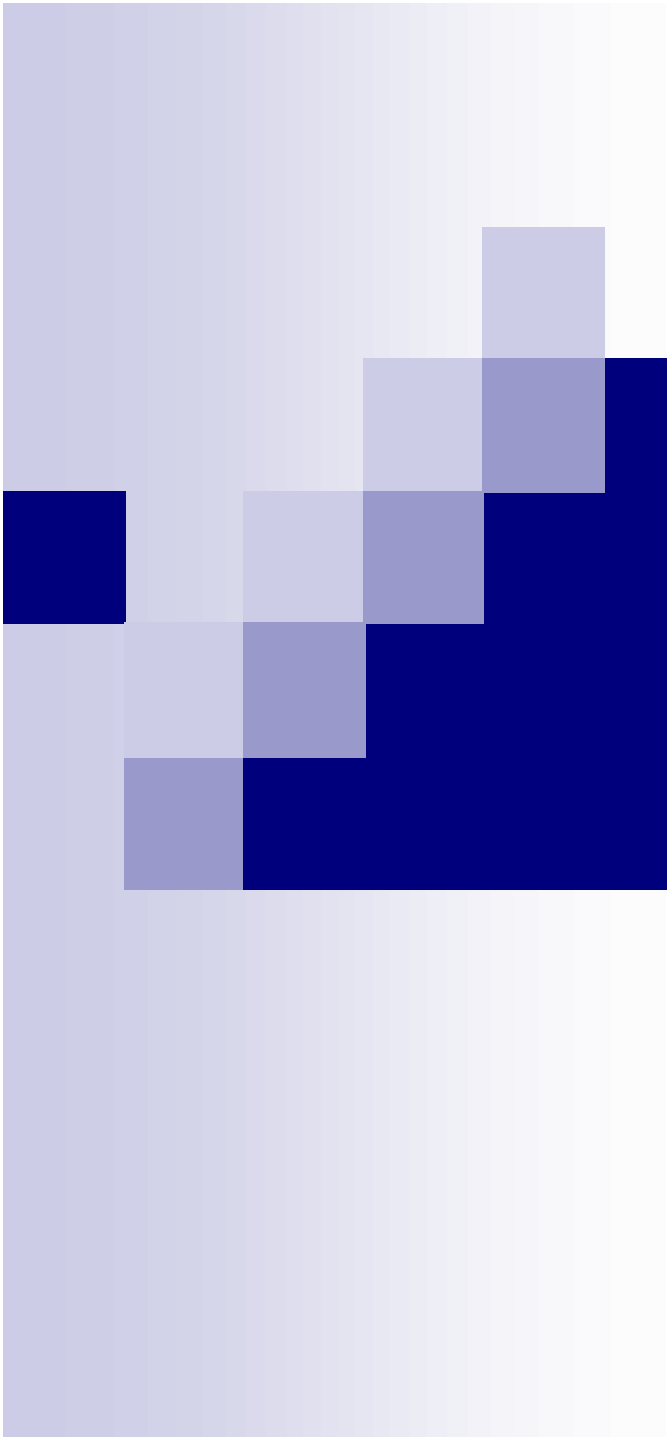




MOQ – 43 PESQUISA OPERACIONAL

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Programa do curso:

Semana 1: Apresentação da disciplina

Introdução à Programação Linear

Resolução de problemas de PL pelo Método Gráfico

Semana 2: Formulação em programação linear

Resolução computacional de problemas de PL

Semana 3: Resolução de problemas de PL pelo Método Simplex

Semana 4: Problemas com soluções iniciais (Método das 2 fases e o Big-M)

Semana 5: SBPO

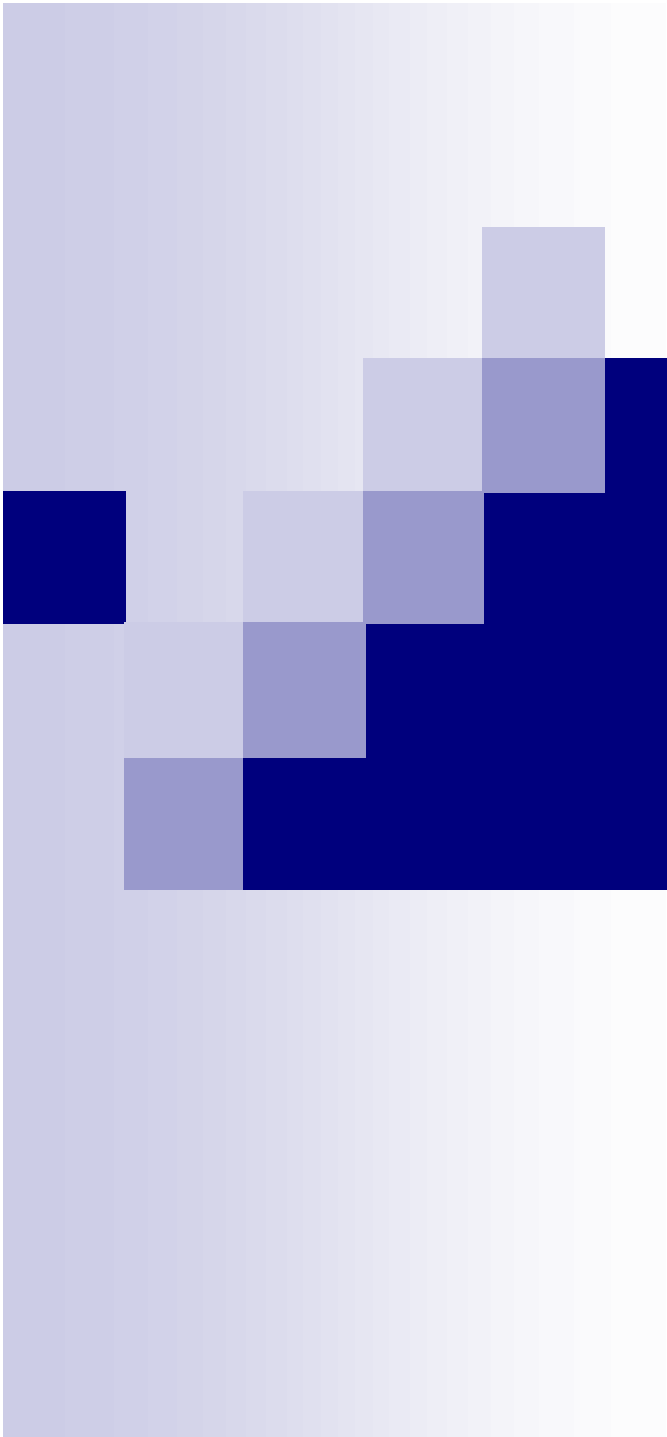
Semana 6: Degeneração, Ciclismo e convergência do Método Simplex (2h)

Semana 7: Prova 1

Feed-back Prova 1

Semana 8: Programação por metas

Entrega e correção do Trabalho 1



MOQ – 43 PPL – RESOLUÇÃO PELO MÉTODO SIMPLEX

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo

Método Simplex para problemas de minimização:

ALTERNATIVAS:

1. RESOLVER COMO UM PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DE $-Z$

$$\text{FO: MIN } Z = 2x_1 - 3x_2 \longrightarrow \text{MAX } -Z = -2x_1 + 3x_2$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	X1	X2	X3	X4	RHS
Z	2	-3 ↓	0	0	0
X3	1	1	1	0	4 →
X4	1	-1	0	1	6
Z	5	0	3	0	12
X3	1	1	1	0	4
X4	2	0	1	1	10

$$\text{COMO } -Z=12 \Rightarrow Z= -12$$

Método Simplex para problemas de minimização:

ALTERNATIVAS:

2. MODIFICAR O MÉTODO SIMPLEX

Inicialização:

Encontrar uma solução básica viável (B).

Passo principal:

Seja $z_k - c_k = \text{Máximo} \{z_j - c_j : j \in R\}$. Se $z_k - c_k \leq 0$ pare - a solução é ótima.

Caso contrário examine y_k .

Se $y_k \leq 0$ pare – a solução ótima é ilimitada.

Se $y_k \not\leq 0$ determine o índice r como:
$$r = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Minimo}} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Atualize o tableau pivotando em y_{ik} (atualize as variáveis básicas e as não básicas com x_k que entra na base e x_i que sai).

Repita o passo principal



Método Simplex para problemas de minimização:

ALTERNATIVAS:

2. MODIFICAR O MÉTODO SIMPLEX

$$\text{FO: MIN } Z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

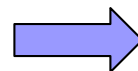
	X1	X2	X3	X4	RHS
Z	-2	3 ↓	0	0	0
X3	1	1	1	0	4 →
X4	1	-1	0	1	6
Z	-5	0	-3	0	-12
X3	1	1	1	0	4
X4	2	0	1	1	10

A matemática do método simplex:

FO: Maximizar $Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$

$$\begin{array}{lcl} \text{S.A. } 1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} & \leq & 24 \\ 3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} & \leq & 21 \\ 1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} & \leq & 8 \\ x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} & \geq & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} 1,5x_1 + 4,0x_2 + 1x_3 & = 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 + 1x_4 & = 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 + 1x_5 & = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}$$

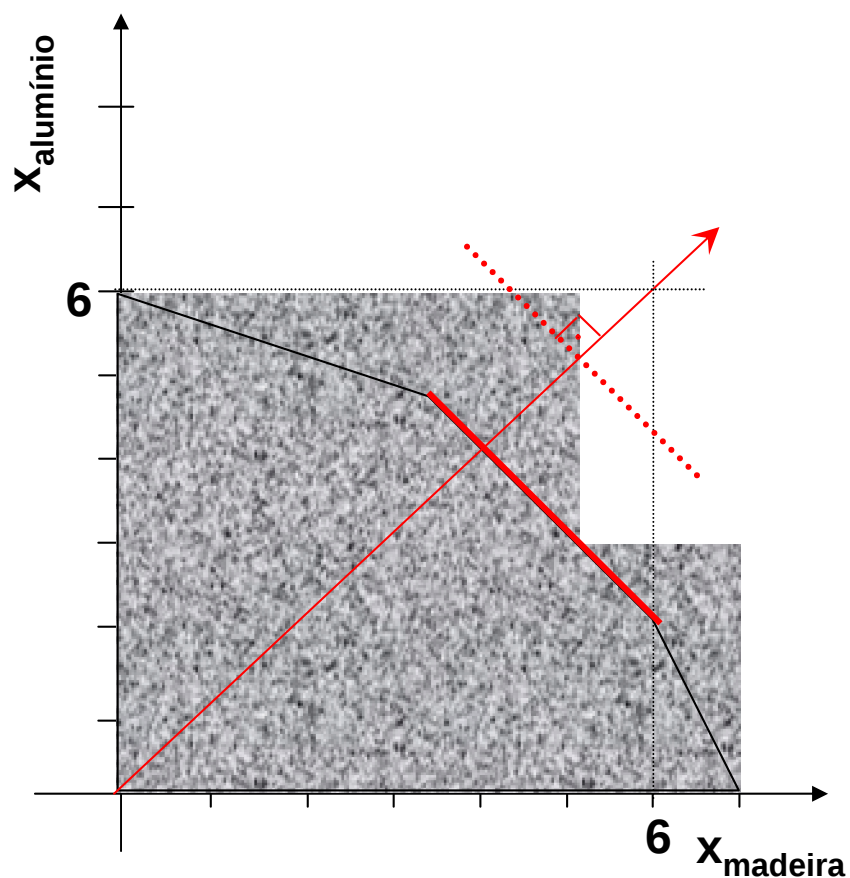


Maximizar $c^T x$

S.A. $Ax=b, x \geq 0$

Condições especiais – múltiplas soluções ótimas:

Maximizar Lucro = $Z = 6,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$



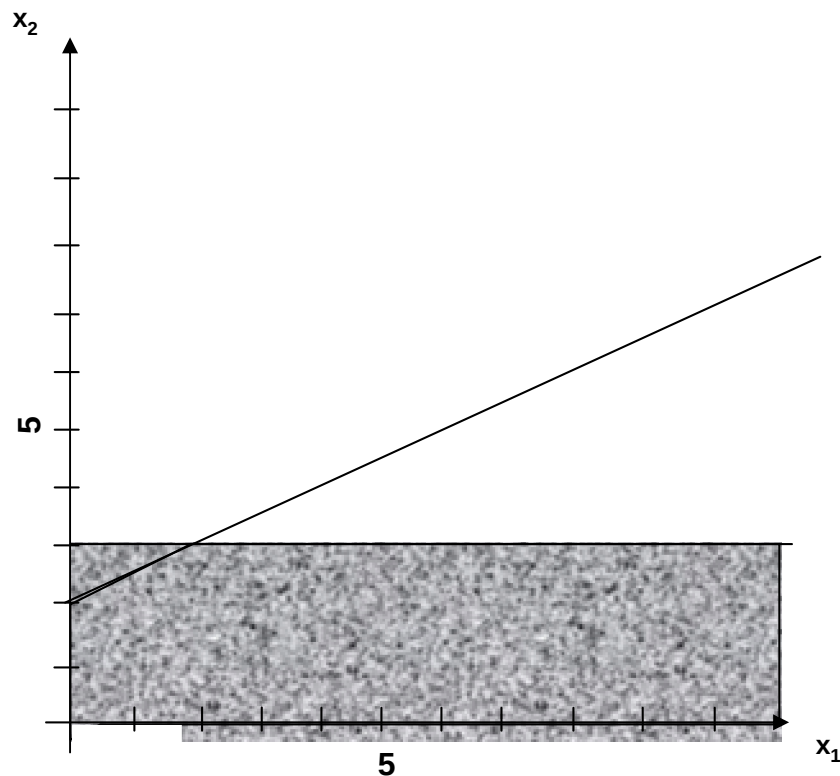
Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	-6	-6	0	0	0	0
x_3	1,5	4	1	0	0	24 →
x_4	3	1,5	0	1	0	21
x_5	1	1	0	0	1	8

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	-15/4	0	3/2	0	0	36
x_2	3/8	1	1/4	0	0	6
x_4	39/16	0	-3/8	1	0	12
x_5	5/8	0	-1/4	0	1	2 →

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	0	0	0	6	48
x_2	0	1	2/5	0	-3/5	24/5
x_4	0	0	3/5	1	-39/10	21/5
x_1	1	0	-2/5	0	8/5	16/5

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	0	0	0	6	48
x_2	0	1	0	-2/3	2	2
x_3	0	0	1	5/3	-13/2	7
x_1	1	0	0	2/3	-1	6

Casos – Solução ilimitada:



$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 \longrightarrow \text{Max } Z - x_1 - x_2 = 0$$

$$\text{S.A. } x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4 \longrightarrow \begin{cases} 1x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

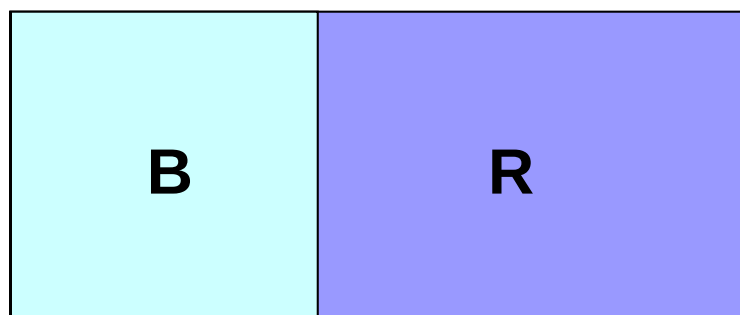
	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	-1	-1	0	0	0
x_3	0	1	1	0	2 →
x_4	-1	2	0	1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	-1	0	-1	0	-2
x_2	0	1	1	0	2
x_4	-1	0	-2	1	0

A matemática do método simplex:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Em cada iteração:



c_B

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

$$w = c_B^T \cdot B^{-1}$$

$$z = w \cdot b = c_B \cdot B^{-1} \cdot b$$

$$z_j - c_j = w \cdot a_j - c_j$$

$$y_k = B^{-1} \cdot a_k$$

A matemática do método simplex:

Tableau inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	w	x_5	RHS	
Z	-4	-6	0	0		0	0	$w \cdot b$
x_3	1,5	4	1	0		0	24	
x_4	3	1,5	0	1		0	21	
x_5	1	1	0	0		1	8	

B^{-1} $B^{-1} \cdot b$

Base: x_3, x_4 e x_5

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad w = c_b^T B^{-1} = (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0)$$

$$Z = w b = 0$$

A matemática do método simplex:

Após 1 iteração

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄ w	x ₅	RHS	
1	-7/4	0	3/2	0	0	36	w.b
x ₂	3/8	1	1/4	0	0	6	
x ₄	39/16	0	-3/8	1	0	12	
x ₅	5/8	0	-1/4	0	1	2	
				B⁻¹	B⁻¹·b		

Base: x₂, x₄ e x₅

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c_b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -3/8 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -3/8 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w = c_b^T B^{-1} = (6 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -3/8 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w = (3/2 \ 0 \ 0)$$

$$Z = w b = 36$$

A matemática do método simplex:

Tableau final

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	w	x ₅	RHS	
1	0	0	4/5	0		14/5	208/5	w.b
x ₂	0	1	2/5	0		-3/5	24/5	
x ₄	0	0	3/5	1		-39/10	21/5	
x ₁	1	0	-2/5	0		8/5	16/5	
					B⁻¹	B⁻¹·b		

Base: x₂, x₄ e x₁

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c_b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

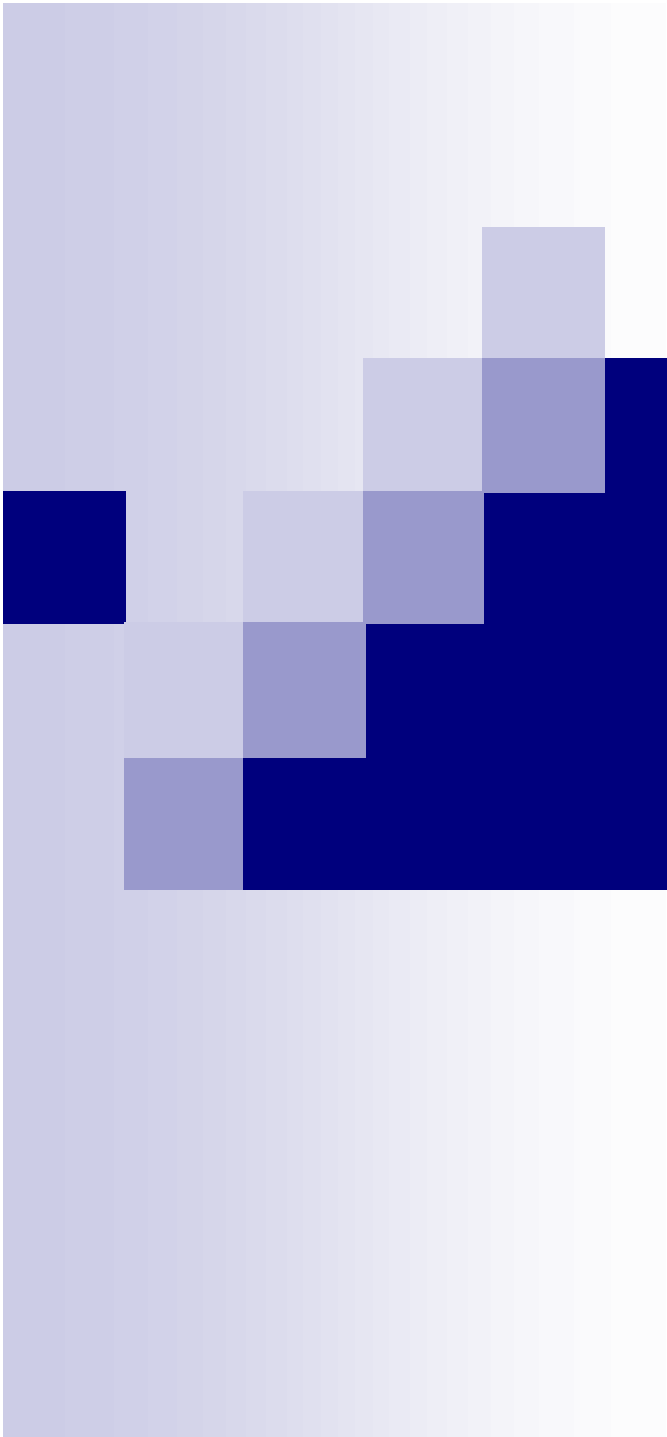
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 1 & -3,9 \\ -2/5 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 1 & -3,9 \\ -2/5 & 0 & 8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 4,2 \\ 3,2 \end{pmatrix}$$

$$w = c_b^T B^{-1} = (6 \ 0 \ 4) \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 1 & -3,9 \\ -2/5 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}$$

$$w = (0,8 \ 0 \ 2,8)$$

$$Z = w b = 41,6$$



MOQ – 43

PROBLEMAS COM SOLUÇÕES INICIAIS

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo

Problemas com soluções iniciais:

Método simplex: inicia-se com uma solução básica viável e move-se para uma solução básica melhorada até que o ponto ótimo seja atingido (ou se obtém uma solução ilimitada).

PROBLEMA: para iniciar o método deve haver uma solução básica viável (B).

CASO SIMPLES: todas as restrições são do tipo $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ ($\mathbf{b} \geq 0$)

$$\begin{array}{lcl} \text{S.A. } 1,5x_1 + 4,0x_2 \leq 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 \leq 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 1,5x_1 + 4,0x_2 + 1,0x_3 & = & 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 + 1,0x_4 & = & 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 + 1,0x_5 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

→ SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL (B): $x_1=x_2=0$ $x_3=24$ $x_4=21$ $x_5=8$ ($\mathbf{x}=0$ e $\mathbf{x}_s=\mathbf{b}$)

Problemas com soluções iniciais:

CASOS COMPLICADOS: restrições do tipo $Ax \geq b$, $x \geq 0$ ($b \geq 0$)

$$\begin{array}{lcl} \text{S.A. } 1,5x_1 + 4,0x_2 \geq 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 \geq 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 1,5x_1 + 4,0x_2 - 1,0x_3 & = & 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 - 1,0x_4 & = & 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 - 1,0x_5 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

→ NÃO HÁ SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL (B): $x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = -24$ $x_4 = -21$ $x_5 = -8$

VARIAÇÕES:

$$Ax \leq b, x \geq 0 \text{ (} b < 0 \text{)} \longrightarrow 1,5x_1 + 4,0x_2 \leq -24 \rightarrow 1,5x_1 + 4,0x_2 + 1,0x_3 = -24$$

$$Ax = b, x \geq 0 \quad 1,5x_1 + 4,0x_2 = 24 \rightarrow 1,5x_1 + 4,0x_2 = 24$$

Problemas com soluções iniciais:

ALTERNATIVA: variáveis artificiais

$$\begin{array}{lcl} \text{S.A. } 1,5x_1 + 4,0x_2 \geq 24 & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1,5x_1 + 4,0x_2 - 1,0x_3 + 1,0x_6 = 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 - 1,0x_4 + 1,0x_7 = 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 + 1,0x_5 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array} \right. \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 \geq 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \text{SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL (B): } \left. \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 = 8 \quad x_6 = 24 \quad x_7 = 21 \end{array} \right\} \mathbf{x = 0 \text{ e } x_a = b}$$

VARIÁVEIS ARTIFICIAIS É UM MECANISMO PARA SE OBTER UMA SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL (INICIAL).

PROBLEMA: o PPL foi modificado

PARA REESTABELECER O PROBLEMA ORIGINAL DEVEMOS FAZER COM QUE AS VARIÁVEIS ARTIFICIAIS TENHAM VALOR 0.

Big-M:

Resolva o problema de programação linear com $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_a = \mathbf{b}$

MINIMIZAR $\mathbf{cx} + \mathbf{Mx}_a$

S.A. $\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b}$

$\mathbf{x}, \mathbf{x}_a \geq \mathbf{0}$

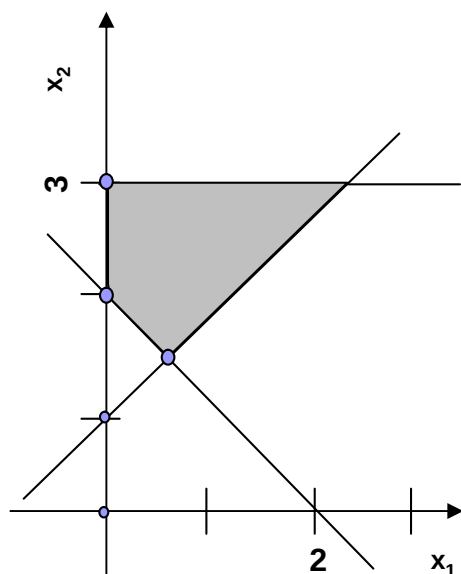
Exemplo: MINIMIZAR $x_1 - 2x_2$

S.A. $x_1 + x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



MIN $x_1 - 2x_2 + \mathbf{Mx}_6 + \mathbf{Mx}_7$

S.A. $x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2$

$-x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1$

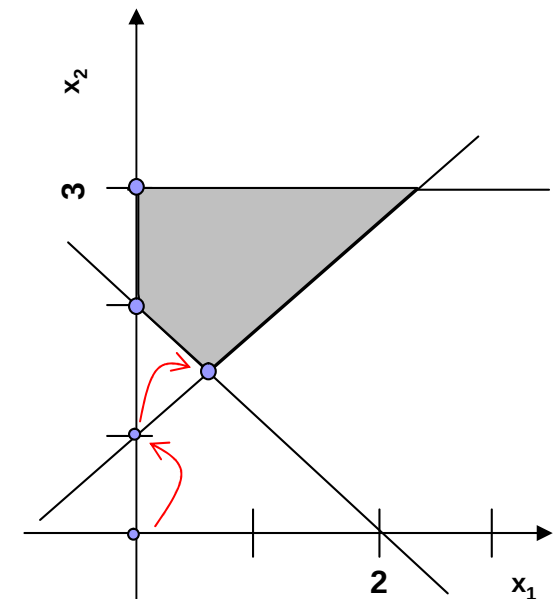
$x_2 + x_5 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1	-1	2	0	0	0	-M	-M	0
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3

Big-M:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	-1	2	0	0	0	-M	-M	0
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3
Z	$-1+M$	$2+M$	-M	0	0	0	-M	2M
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3
Z	-1	$2+2M \downarrow$	-M	-M	0	0	0	3M
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	$1 \rightarrow$
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3
Z	$1+2M \downarrow$	0	-M	$2+M$	0	0	$-2-2M$	$-2+M$
x_6	2	0	-1	1	0	1	-1	$1 \rightarrow$
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	0	0	1	1	0	-1	2
Z	0	0	$\frac{1}{2}$	1,5	0	$-\frac{1}{2}-M$	$-1,5-M$	-2,5
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1,50
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	1,50	1,50



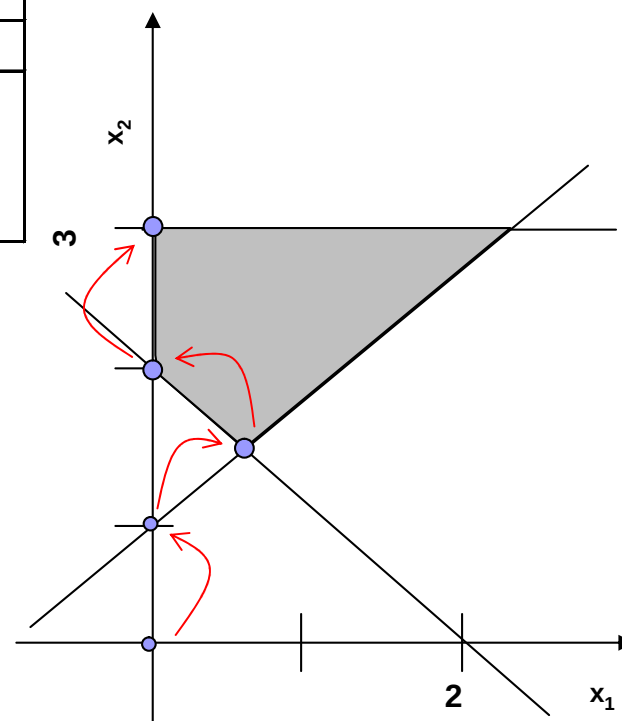
Big-M:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	0	0	$\frac{1}{2}$	$1,5\downarrow$	0	$-\frac{1}{2}-M$	$-1,5-M$	-2,5
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \rightarrow$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1,50
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	1,50	1,50
Z	-3	0	$2\downarrow$	0	0	$-2-M$	$-M$	-4
x_4	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_5	-1	0	1	0	1	-1	0	$1 \rightarrow$
1	-1	0	0	0	-2	$-M$	$-M$	-6
x_4	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	1	0	0	1	0	0	3
x_3	-1	0	1	0	1	-1	0	1

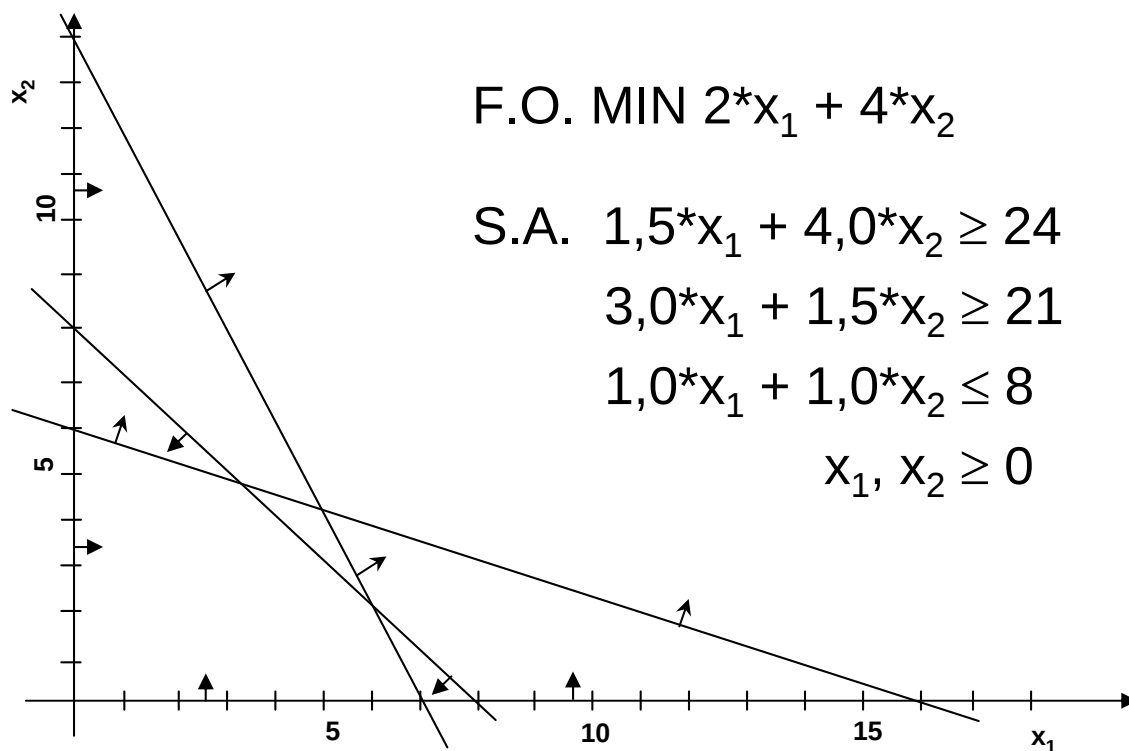
→ Solução ótima

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$Z = -6$$



Big-M: quando não há soluções básicas viáveis



$$\text{F.O. MIN } 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{S.A. } 1,5x_1 + 4,0x_2 \geq 24$$

$$3,0x_1 + 1,5x_2 \geq 21$$

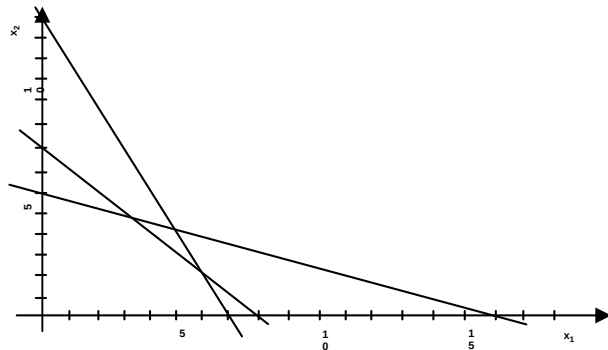
$$1,0x_1 + 1,0x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 4,0x_2 - 1,0x_3 + 1,0x_6 = 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 - 1,0x_4 + 1,0x_7 = 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 + 1,0x_5 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Big-M: quando não há soluções básicas viáveis

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	-2	-4	0	0	0	-M	-M	0
Z	$-2+1,5M$	$-4+4M$	-M	0	0	0	-M	$24M$
Z	$-2+4,5M$	$-4+5,5M \downarrow$	-M	-M	0	0	0	$45M$
x_6	1,5	4	-1	0	0	1	0	$24 \rightarrow$
x_7	3	1,5	0	-1	0	0	1	21
x_5	1	1	0	0	1	0	0	8
Z	$-0,5+2,4375M \downarrow$	0	$-1+0,375M$	-M	0	$1-1,375M$	0	$24+12M$
x_2	0,375	1	-0,25	0	0	0,25	0	6
x_7	2,4375	0	0,375	-1	0	-0,375	1	12
x_5	0,625	0	0,25	0	1	-0,25	0	$2 \rightarrow$
Z	0	0	$0,8-0,6M$	-M	$0,8-3,9M$	$0,8-0,4M$	0	$25,6+4,2M$
x_2	0	1	-0,4	0	-0,6	0,4	0	4,8
x_7	0	0	-0,6	-1	-3,9	0,6	1	4,2
x_1	1	0	0,4	0	1,6	-0,4	0	3,2



**COMO HÁ VARIÁVEIS
ARTIFICIAIS NA BASE, NÃO HÁ
SOLUÇÕES BÁSICAS VIÁVEIS.**



Método das duas fases:

FASE 1: resolva o problema de programação linear com $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_a = \mathbf{b}$

MINIMIZAR $\mathbf{1x}_a$

S.A. $\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b}$

$\mathbf{x}, \mathbf{x}_a \geq \mathbf{0}$

Se ao chegar na solução ótima $\mathbf{x}_a \neq \mathbf{0}$, o problema original não tem solução viável.

Se $\mathbf{x}_a = \mathbf{0}$ vá para a fase 2.

FASE 2: resolva o problema de programação linear original utilizando a solução da

fase 1 como solução básica viável (B) $\rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ e $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$

MINIMIZAR $\mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N$

S.A. $\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$

Método das duas fases:

Exemplo: MINIMIZAR $x_1 - 2x_2$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

MIN $Z - x_1 + 2x_2$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

FASE 1: MIN

$$x_6 + x_7$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3

Método das duas fases:

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	RHS
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x ₆	1	1	-1	0	0	1	0	2
x ₇	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x ₅	0	1	0	0	1	0	0	3



Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	RHS
1	1	1	-1	0	0	0	-1	2
x ₆	1	1	-1	0	0	1	0	2
x ₇	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x ₅	0	1	0	0	1	0	0	3



Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	RHS
1	0	2	-1	-1	0	0	0	3
x ₆	1	1	-1	0	0	1	0	2
x ₇	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x ₅	0	1	0	0	1	0	0	3




Método das duas fases:

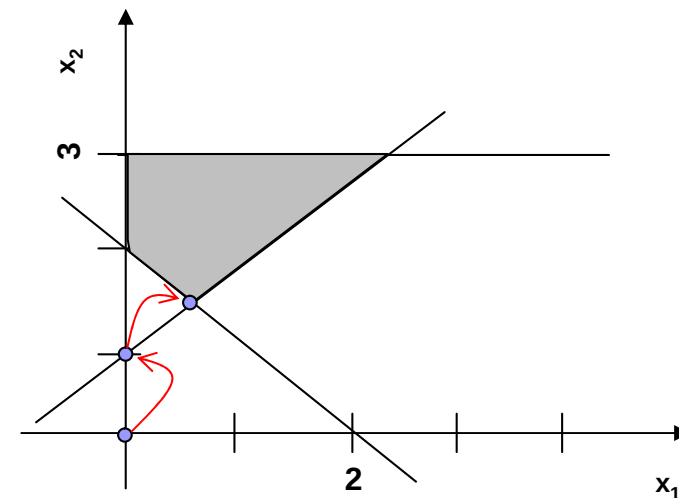
Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1	2	0	-1	-1	0	0	-2	1
x_6	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	0	0	1	1	0	-1	2

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

→ Fim da FASE 1: solução básica viável

$$x_1 = 1/2, x_2 = 3/2, x_5 = 3/2$$

$$Z = 0$$



Método das duas fases:

FASE 2:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	-1	2	0	0	0	0
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Método das duas fases:

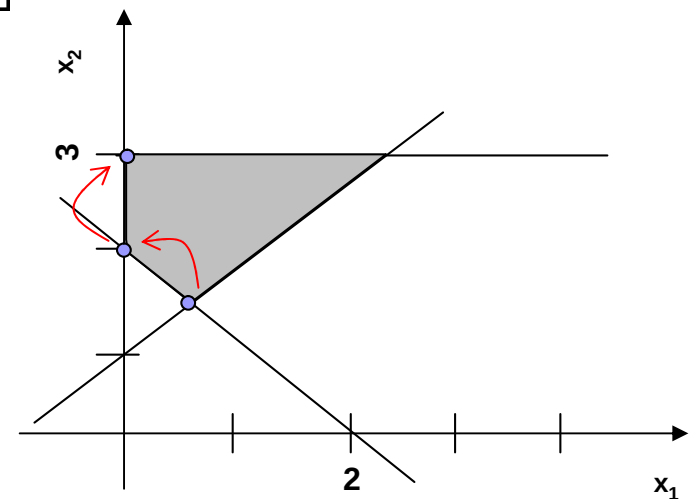
Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	-3	0	2	0	0	-4
x_4	2	0	-1	1	0	1
x_2	1	1	-1	0	0	2
x_5	-1	0	1	0	1	1

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	-1	0	0	0	-2	-6
x_4	1	0	0	1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	3
x_3	-1	0	1	0	1	1

→ Fim da FASE 2: solução ótima

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$Z = -6$$





Para casa:

- **Lista de Exercícios 4**
- **Leitura Winston: 4.6 a 4.8; 4.12 e 4.13**