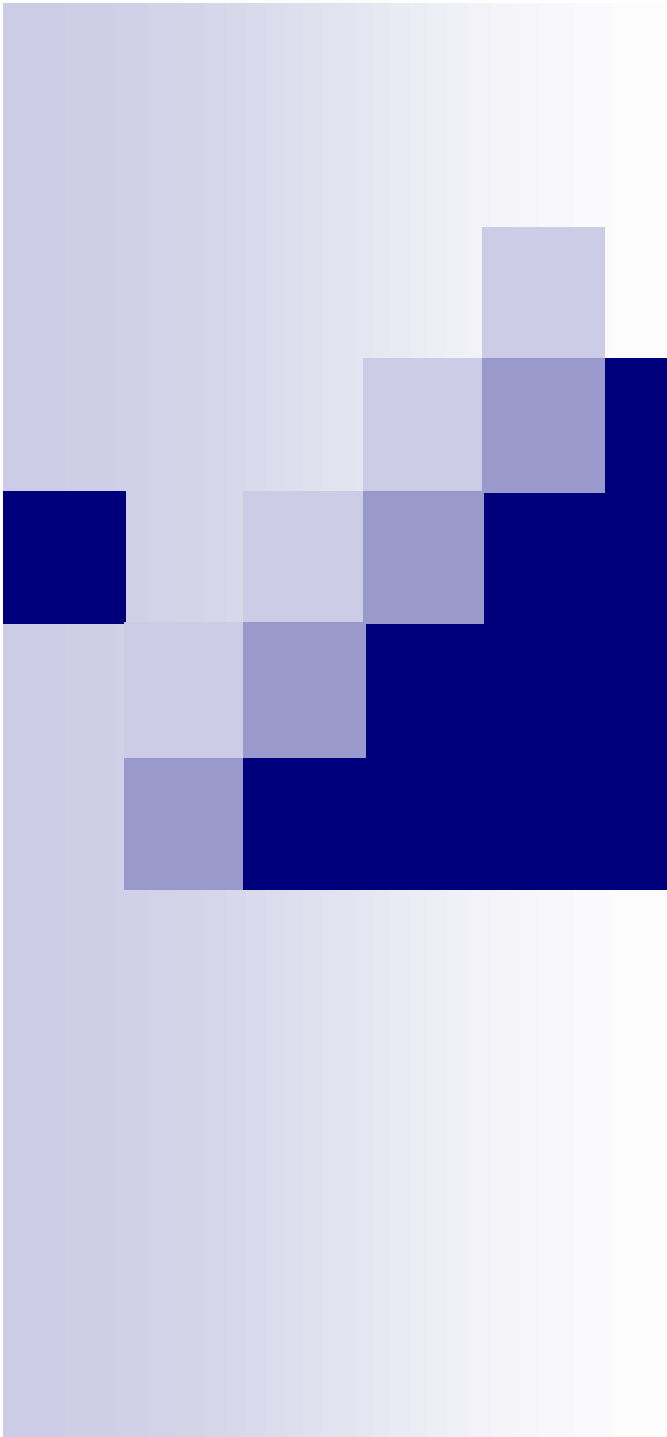




MOQ – 43 PESQUISA OPERACIONAL

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Programa do curso:

Semana 1: Apresentação da disciplina

Introdução à Programação Linear

Resolução de problemas de PL pelo Método Gráfico

Semana 2: Formulação em programação linear

Resolução computacional de problemas de PL

Semana 3: Resolução de problemas de PL pelo Método Simplex

Semana 4: Problemas com soluções iniciais (Método das 2 fases e o Big-M)

Semana 5: SBPO

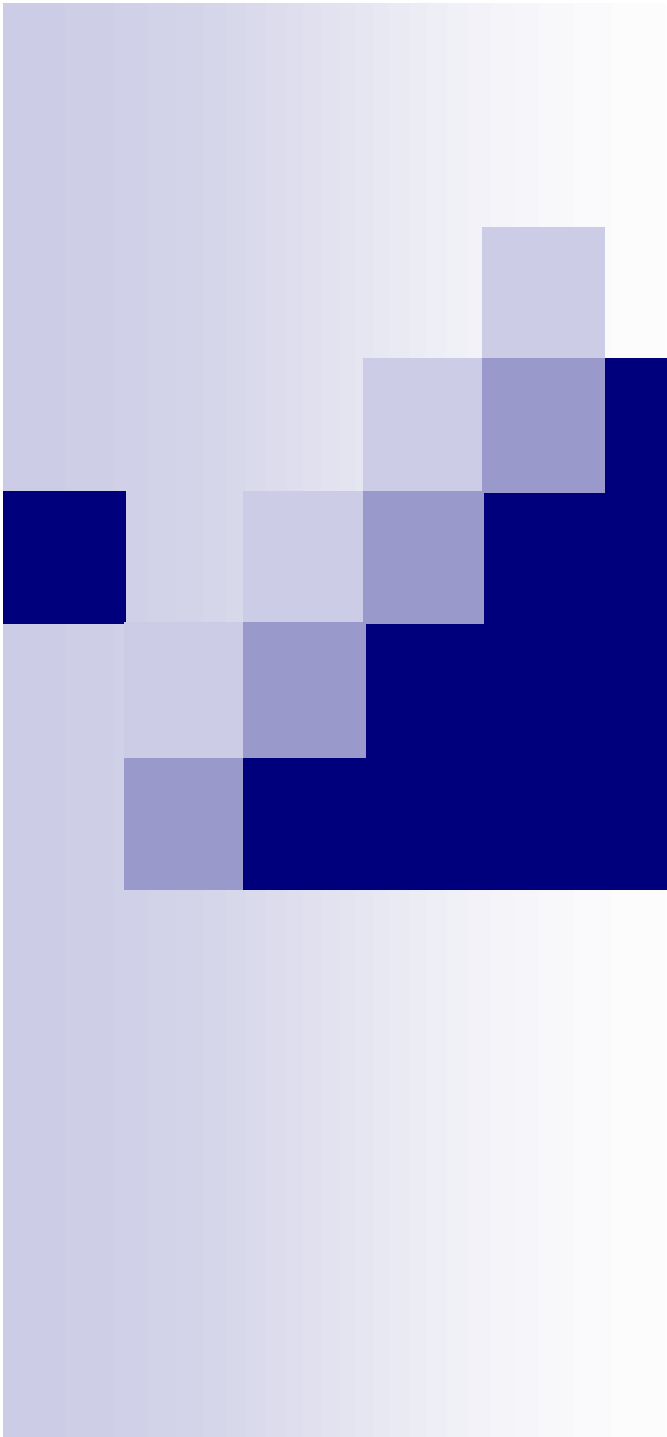
Semana 6: Degeneração, Ciclismo e convergência do Método Simplex (2h)

Semana 7: Prova 1

Feed-back Prova 1

Semana 8: Programação por metas

Entrega e correção do Trabalho 1



MOQ – 43 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Eliminação Gaussiana (Pivoteamento, Gauss-Jordan):

É um método direto para solução de sistemas de equações lineares.

Propriedade: A solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ não se altera se o submetermos a uma seqüência de operações do tipo:

- i. Multiplicação de uma equação por constante não-nula;
- ii. Soma do múltiplo de uma equação à outra;
- iii. Troca da ordem das equações.

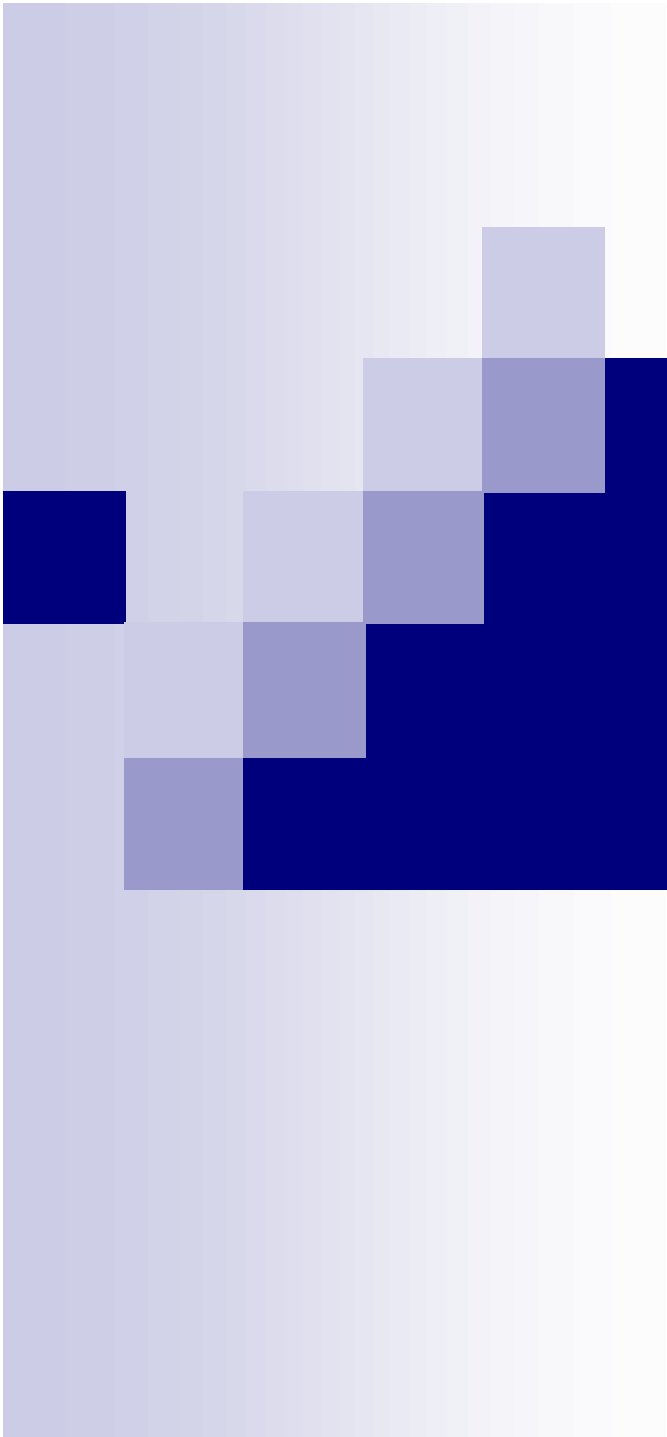
$$\begin{aligned} \text{Ex: } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} &\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0 & 6 & -3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Eliminação Gaussiana (Pivoteamento):

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & -3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\therefore x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



MOQ – 43 PL – INTRODUÇÃO AO MÉTODO SIMPLEX

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo

Formas de Representação:

- Formato padrão: todas as restrições são igualdades e todas as variáveis são não-negativas.
- Formato canônico: (problema de minimização) todas as variáveis são não-negativas e todas as restrições são do tipo $\geq$.

	MINIMIZATION PROBLEM	MAXIMIZATION PROBLEM
STANDARD FORM	Minimize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$	Maximize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$
CANONICAL FORM	Minimize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$	Maximize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

Problema de mix de produção:

FO: Maximizar $Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$

$$\begin{aligned} \text{S.A. } 1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} &\leq 24 \\ 3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} &\leq 21 \\ 1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} &\leq 8 \\ x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} &\geq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} 1,5x_1 + 4,0x_2 + 1x_3 & = 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 + 1x_4 & = 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 + 1x_5 & = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow$ sistema linear indeterminado com m equações e n variáveis ($n \geq m$)

Variáveis básicas e variáveis não básicas:

- Definição: Uma base de uma matrix A ($m \times n$) é uma matriz quadrada de m vetores coluna linearmente independentes em $\mathbb{R}^m$. As variáveis associadas a essas colunas são denominadas variáveis básicas.

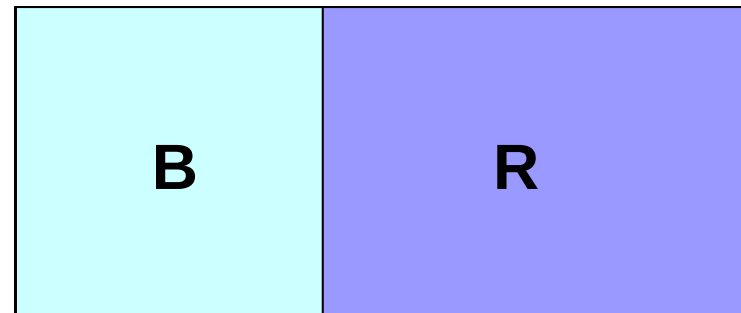
Assim, é possível decompor o vetor de variáveis em $x = (x_B, x_R)$, em que: x_B representa o vetor das variáveis básicas de m componentes e x_R representa o vetor das $n-m$ variáveis restantes (não-básicas).

No exemplo:

VARIÁVEIS BÁSICAS	VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	x_{MADEIRA} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$
x_{MADEIRA} , FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{CORTE} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$
$x_{\text{ALUMÍNIO}}$, FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{CORTE} , x_{MADEIRA}
FOLGA _{CORTE} , x_{MADEIRA} , FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{MONTAGEM} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$
FOLGA _{CORTE} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$, FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{MONTAGEM} , x_{MADEIRA}
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , x_{MADEIRA}	FOLGA _{ACABAMENTO} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$	FOLGA _{ACABAMENTO} , x_{MADEIRA}
x_{MADEIRA} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$, FOLGA _{CORTE}	FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}
x_{MADEIRA} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$, FOLGA _{MONTAGEM}	FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{ACABAMENTO}
x_{MADEIRA} , $x_{\text{ALUMÍNIO}}$, FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM}

Variáveis básicas e variáveis não básicas:

Se estendermos o raciocínio à matriz A, podemos dividi-la em uma matriz $m \times m$, que denominaremos por matriz B, e outra $m \times (n-m)$, que denominaremos matriz R. Assim:



No exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VARIÁVEIS BÁSICAS	VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	X _{MADEIRA} , X _{ALUMÍNIO}

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 \\ 3 & 1,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variáveis básicas e Soluções básicas

Como podemos solucionar o conjunto de equações $m \times m$ somente em função das variáveis básicas, temos que $x = (x_B, 0)$, em que $x_B = B^{-1}b$

No exemplo:

VARIÁVEIS BÁSICAS	VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	X _{MADEIRA} , X _{ALUMÍNIO}

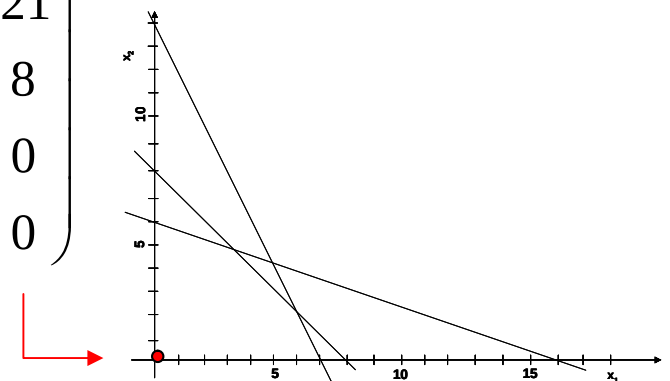
$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 \\ 3 & 1,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x = \begin{pmatrix} \text{FOLGA}_{\text{CORTE}} \\ \text{FOLGA}_{\text{MONTAGEM}} \\ \text{FOLGA}_{\text{ACABAMENTO}} \\ x_{\text{MADEIRA}} \\ x_{\text{ALUMÍNIO}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}$$



Variáveis básicas e Soluções básicas

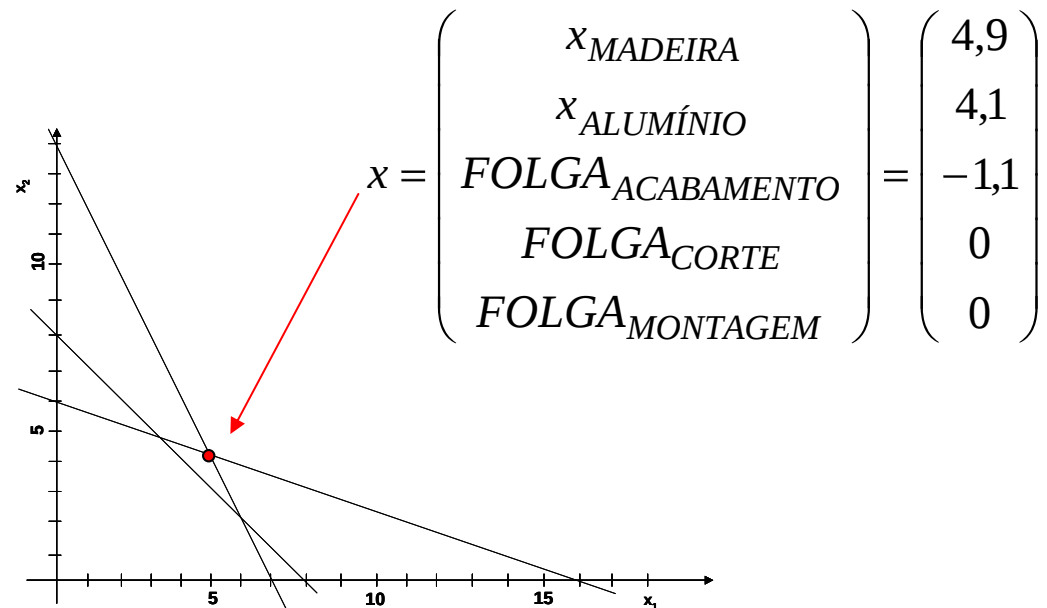
No exemplo:

VARIÁVEIS BÁSICAS	VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS
$X_{\text{MADEIRA}}, X_{\text{ALUMÍNIO}}, \text{FOLGA}_{\text{ACABAMENTO}}$	$\text{FOLGA}_{\text{CORTE}}, \text{FOLGA}_{\text{MONTAGEM}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1,5 & 4 & 0 \\ 3 & 1,5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -0,154 & 0,410 & 0 \\ 0,307 & -0,154 & 0 \\ -0,154 & -0,256 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix}$$



Soluções básicas e conjunto de soluções básicas

- Definição: Seja B uma base associada à matriz A. O vetor composto de $x_B = B^{-1}b$ e $x_R=0$ é chamado de solução básica.

No exemplo:

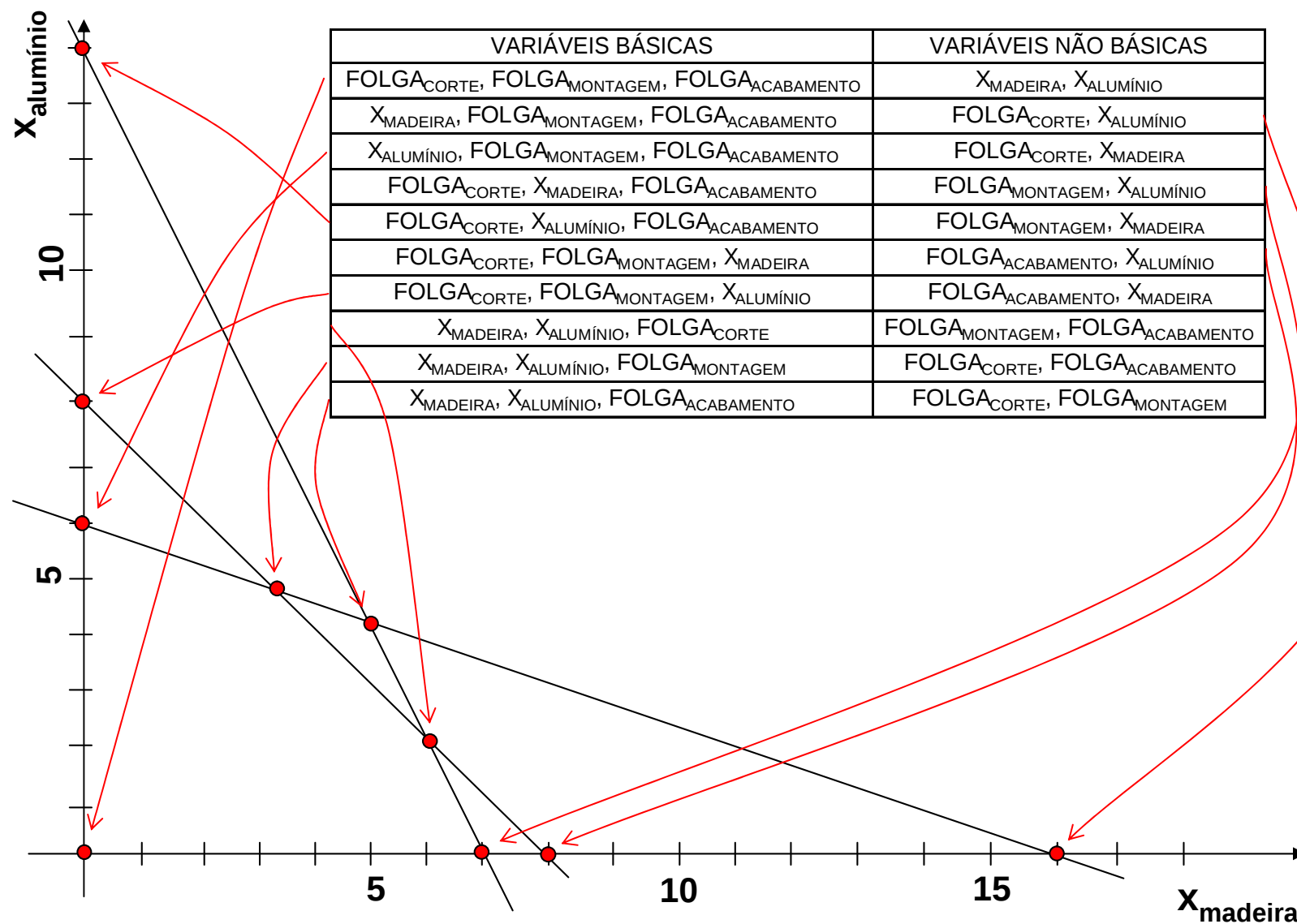
VARIÁVEIS BÁSICAS	VARIÁVEIS NÃO BÁSICAS
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	$x_{MADEIRA}$, $x_{ALUMÍNIO}$
$x_{MADEIRA}$, FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{CORTE} , $x_{ALUMÍNIO}$
$x_{ALUMÍNIO}$, FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{CORTE} , $x_{MADEIRA}$
FOLGA _{CORTE} , $x_{MADEIRA}$, FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{MONTAGEM} , $x_{ALUMÍNIO}$
FOLGA _{CORTE} , $x_{ALUMÍNIO}$, FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{MONTAGEM} , $x_{MADEIRA}$
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , $x_{MADEIRA}$	FOLGA _{ACABAMENTO} , $x_{ALUMÍNIO}$
FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM} , $x_{ALUMÍNIO}$	FOLGA _{ACABAMENTO} , $x_{MADEIRA}$
$x_{MADEIRA}$, $x_{ALUMÍNIO}$, FOLGA _{CORTE}	FOLGA _{MONTAGEM} , FOLGA _{ACABAMENTO}
$x_{MADEIRA}$, $x_{ALUMÍNIO}$, FOLGA _{MONTAGEM}	FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{ACABAMENTO}
$x_{MADEIRA}$, $x_{ALUMÍNIO}$, FOLGA _{ACABAMENTO}	FOLGA _{CORTE} , FOLGA _{MONTAGEM}

$$x = \begin{pmatrix} FOLGA_{CORTE} \\ FOLGA_{MONTAGEM} \\ FOLGA_{ACABAMENTO} \\ x_{MADEIRA} \\ x_{ALUMÍNIO} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_{MADEIRA} \\ x_{ALUMÍNIO} \\ FOLGA_{ACABAMENTO} \\ FOLGA_{CORTE} \\ FOLGA_{MONTAGEM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,9 \\ 4,1 \\ -1,1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

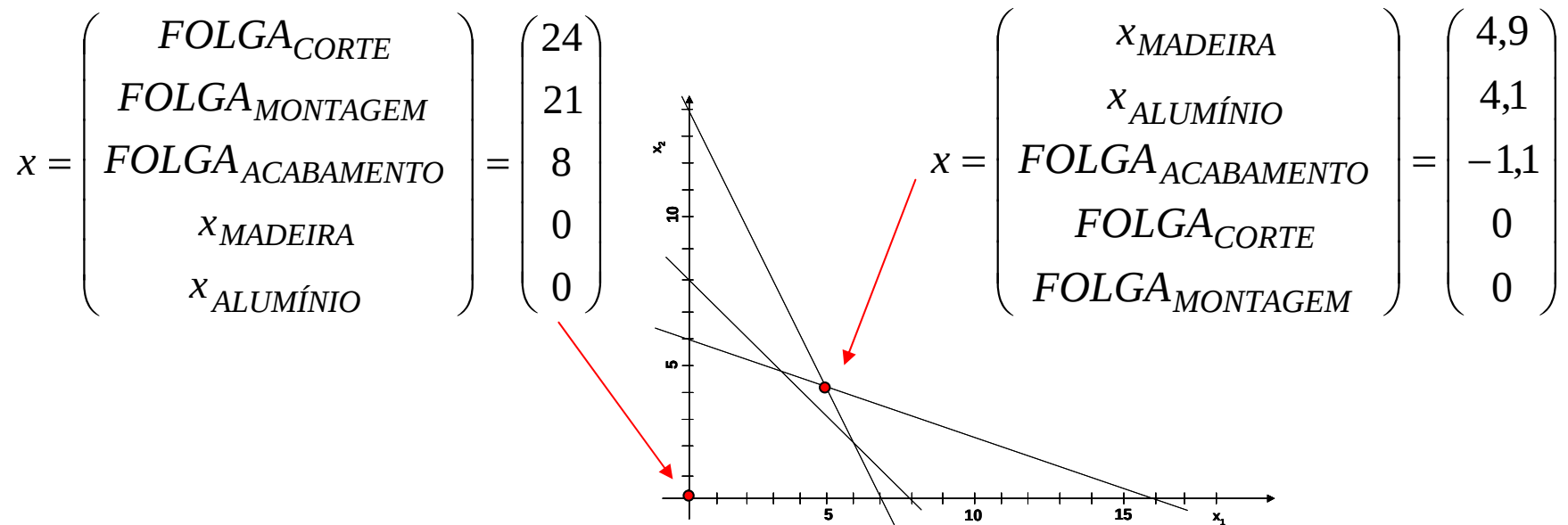
⇒ CONJUNTO DE SOLUÇÕES BÁSICAS

Conjunto de soluções básicas



Soluções básicas viáveis (bfs)

- Definição: Uma solução básica sem componentes negativos é denominada solução básica viável (bfs).

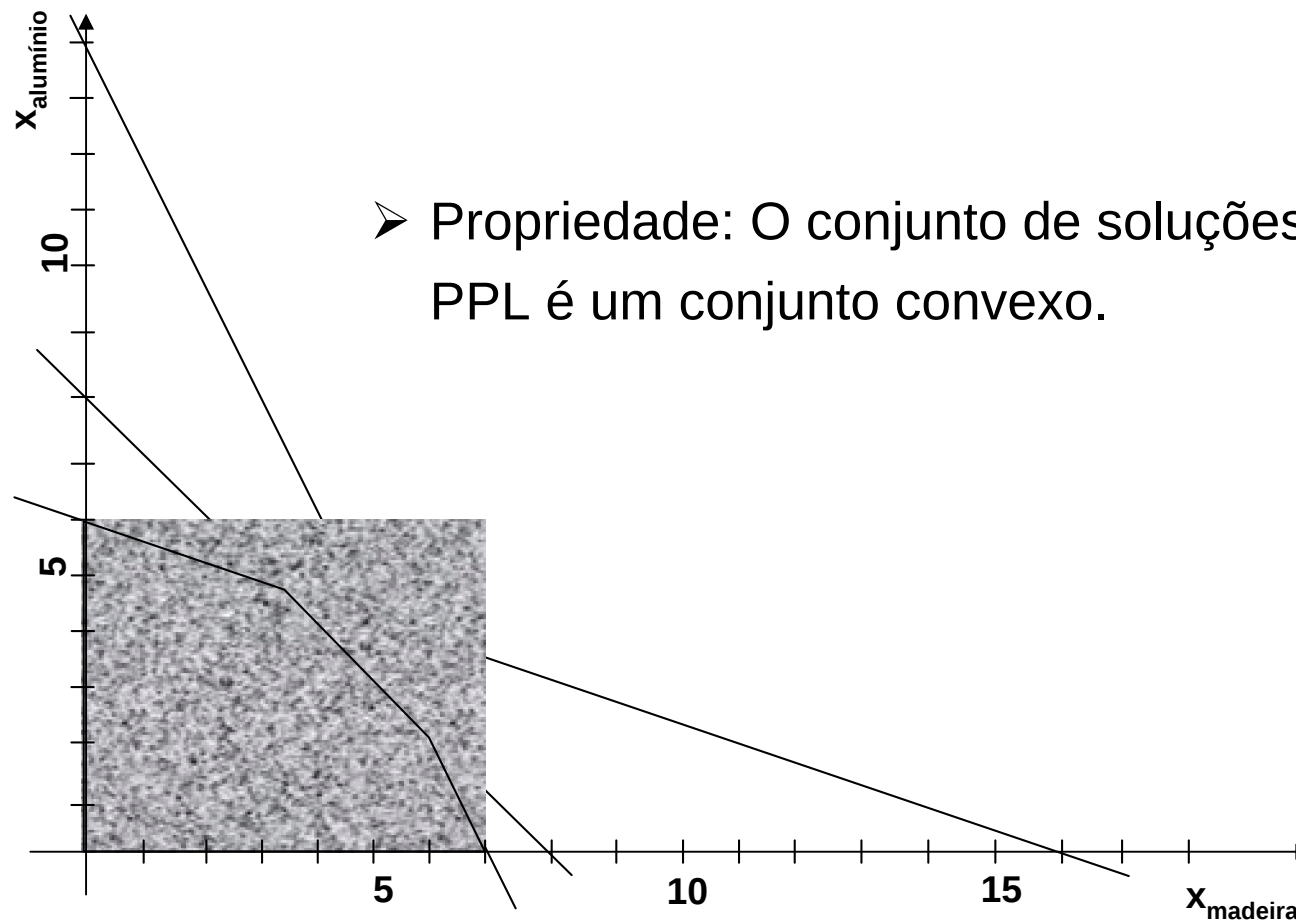


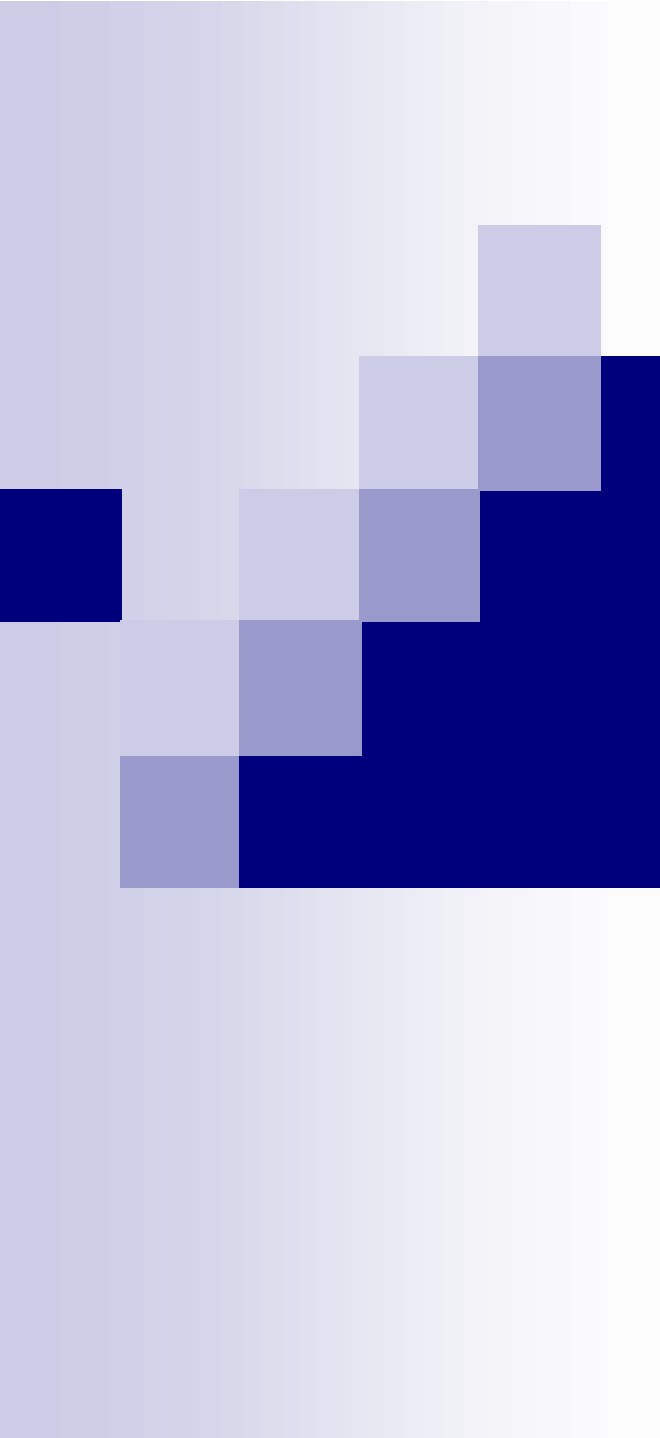
⇒ **Solução básica viável: $Ax=b, x \geq 0$**

Solução básica viável $\Leftrightarrow$ Ponto Extremo

Conjunto de soluções viáveis

- Definição: O conjunto $C = \{x \text{ tal que } Ax=b, x \geq 0\}$ denomina-se conjunto de soluções viáveis.





MOQ – 43 PL – RESOLUÇÃO PELO MÉTODO SIMPLEX

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Método / Algoritmo simplex:

O Simplex é um algoritmo (seqüência finita de instruções que termina em um número finito de operações) que faz uso de um ferramental baseado em álgebra linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um PPL.

Princípio do algoritmo:

- ✓ Já vimos que a solução ótima de um PPL é um ponto extremo (solução básica viável).
- ✓ Em grandes problemas o número de pontos extremos pode ser muito grande.
- ✓ **Como evitar o teste de todas as soluções viáveis básicas possíveis para garantir a otimização do sistema?**

Problema de mix de produção: Ilustração

	Corte	Montagem	Acabamento
Madeira	1,5 h/porta	3,0 h/porta	1 h/porta
Alumínio	4,0 h/porta	1,5 h/porta	1 h/porta
Disponibilidade	24 h	21 h	8 h

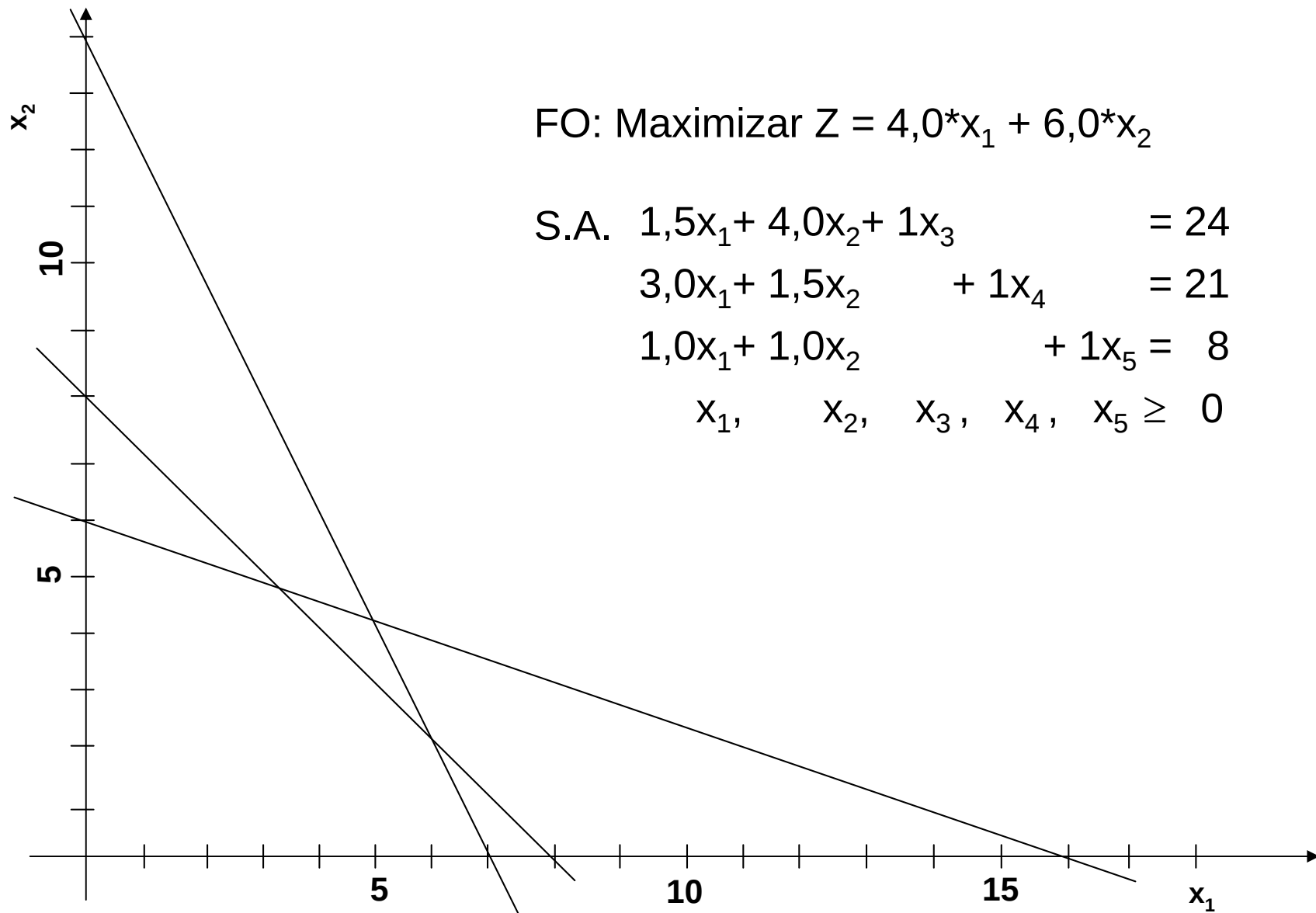
Lucro unitário: porta de madeira: R\$4,00

porta de alumínio: R\$6,00

FO: Maximizar $Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$

$$\begin{array}{lcl} \text{S.A. } 1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} & \leq & 24 \\ 3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} & \leq & 21 \\ 1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} & \leq & 8 \\ x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} & \geq & 0 \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 1,5x_1 + 4,0x_2 + 1x_3 & = & 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 + 1x_4 & = & 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 + 1x_5 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Método Simplex – Passos:



Método simplex – forma tabular (Problema de Maximização):

FO: $\text{Max } Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \rightarrow \text{Max } Z - 4,0 \cdot x_1 - 6,0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 0$

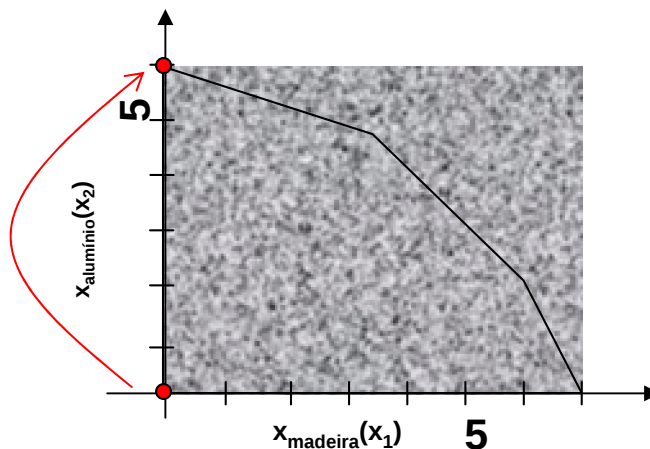
S.A. $\begin{cases} 1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 24 \\ 3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 21 \\ 1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 8 \\ x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1,5x_1 + 4,0x_2 + 1x_3 = 24 \\ 3,0x_1 + 1,5x_2 + 1x_4 = 21 \\ 1,0x_1 + 1,0x_2 + 1x_5 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	RHS
1	-4	-6	0	0	0	0
x ₃	1,5	4	1	0	0	24
x ₄	3	1,5	0	1	0	21
x ₅	1	1	0	0	1	8

Método Simplex – Forma Tabular:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
1	-4	-6	0	0	0	0	
x_3	1,5	4	1	0	0	24	$= 24/4 = 6 \rightarrow$
x_4	3	1,5	0	1	0	21	$= 21/1,5 = 14$
x_5	1	1	0	0	1	8	$= 8/1 = 8$

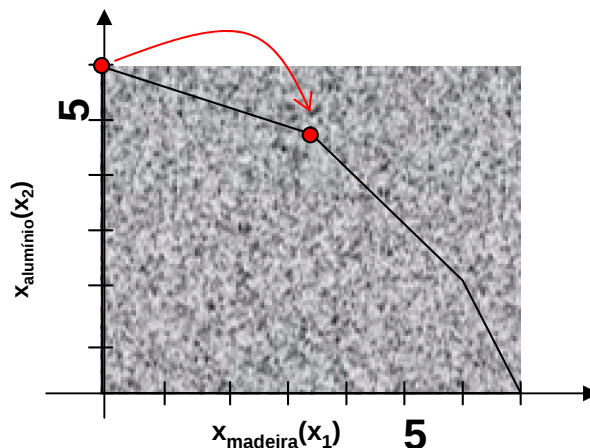
Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	-7/4	0	3/2	0	0	36
x_2	3/8	1	1/4	0	0	6
x_4	39/16	0	-3/8	1	0	12
x_5	5/8	0	-1/4	0	1	2



Método Simplex – Forma Tabular:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
1	-7/4	0	3/2	0	0	36	
x_2	3/8	1	1/4	0	0	6	$= 6/0,375 = 16$
x_4	39/16	0	-3/8	1	0	12	$= 12/2,44 = 4,9$
x_5	5/8	0	-1/4	0	1	2	$= 2/0,625 = 3,2 \rightarrow$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	0	4/5	0	14/5	208/5
x_2	0	1	2/5	0	-3/5	24/5
x_4	0	0	3/5	1	-39/10	21/5
x_1	1	0	-2/5	0	8/5	16/5

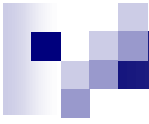


→ Solução ótima:

$$x_1 \text{ (madeira)} = 16/5 = 3,2$$

$$x_2 \text{ (alumínio)} = 24/5 = 4,8$$

$$\text{Lucro} = 208/5 = 41,6$$



Método Simplex – Formalização (Problema de Maximização):

Inicialização:

Encontrar uma solução básica viável (B).

Passo principal:

Seja $z_k - c_k = \text{Mínimo } \{z_j - c_j : j \in R\}$. Se $z_k - c_k \geq 0$ pare - a solução é ótima.

Caso contrário examine y_k .

Se $y_k \leq 0$ pare – a solução ótima é ilimitada.

Se $y_k \not\leq 0$ determine o índice r como:
$$r = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Minimo}} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Atualize o tableau pivotando em y_{ik} (atualize as variáveis básicas e as não básicas com x_k que entra na base e x_i que sai).

Repita o passo principal



Para casa:

- **Lista de Exercícios 3**
- **Leitura Winston: 2.3 e 4.1 a 4.5**