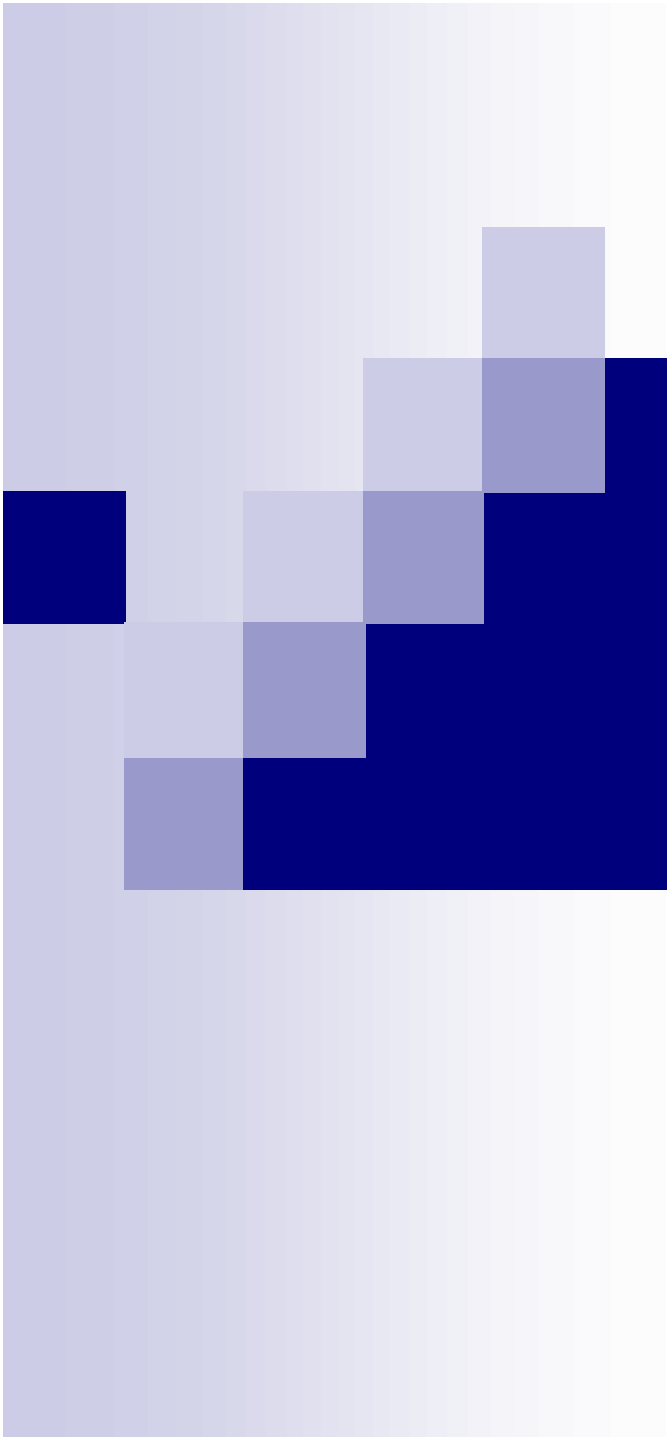


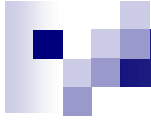


MOQ – 43 PESQUISA OPERACIONAL

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Pesquisa Operacional

Durante a Segunda Guerra Mundial, os líderes militares solicitaram que cientistas estudassem problemas como posicionamento de radares, armazenamento de munições e transporte de tropa, etc...



A aplicação do método científico e de ferramentas matemáticas em operações militares passou a ser chamado de Pesquisa Operacional.



Hoje em dia, Pesquisa Operacional é enfoque científico para Problemas de Decisão.



Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional é uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais, tendo como foco a tomada de decisões.

Programação Matemática

Estatística / Séries Temporais / Modelos de Previsão

Fluxo em Redes / Grafos / Otimização Combinatória

Metaheurística

Redes Neurais / Sistemas Especialistas / IA

Análise Multicritério

Simulação / Filas / Processos Estocásticos

Teoria da decisão



Pesquisa Operacional

MB-207 - Econometria Aplicada

Modelos de regressão linear. Previsão. Séries temporais.

CC-238 - Grafos e Otimização Combinatória

CT-215 - Inteligência Artificial

Sistemas especialistas. Aplicações de inteligência artificial.

CC-236 - Modelagem de Simulação por Computadores

EE-214 - Inteligência Artificial em Controle e Automação

Sistemas especialistas. Redes neurais, lógica fuzzy.

IT-207 - Pesquisa Operacional Aplicada a Problemas de Transporte Aéreo

Programação linear. Problemas do transporte, do transbordo e da designação. Grafos.

MB-217 – Análise da decisão sob incerteza



Programação Matemática

Um problema de programação matemática tem por objetivo encontrar os valores para as **variáveis de decisão** que **otimizam (maximizam ou minimizam)** uma **função objetivo** respeitando um conjunto de **restrições**.

Tipos de modelos de programação matemática:

- Problemas de programação linear
- Problemas de programação inteira
- Problemas de programação não-linear
- Outros



Exemplo:

Um fabricante de borracha, utilizada na fabricação de pneus, combina 3 matérias-primas: borracha bruta, petróleo e carbono negro. O custo por kilo dessas materias-primas são: borracha bruta – US\$ 4.00, petróleo – US\$1.00, carbono negro – US\$7.00.

O borracha utilizada em pneus deve ter dureza entre 25 e 35, elasticidade maior que 16 e resistência a tensão maior que 12.

Análises estatísticas (regressões) mostraram que a dureza, a elasticidade e a resistência a tensão, em uma mistura de 100 kg de borracha bruta, petróleo e carbono negro são inferidas por:

$$\text{Dureza} = 34 + 0,10 \cdot R + 0,06 \cdot O - 0,3 \cdot C + 0,001 \cdot R \cdot O + 0,005 \cdot O^2 + 0,001 \cdot C^2$$

$$\text{Elasticidade} = 17 + 0,35 \cdot R - 0,04 \cdot O - 0,002 \cdot R^2$$

$$\text{Resistência a tensão} = 12,50 - 0,10 \cdot O - 0,001 \cdot O^2$$

R: quantidade de borracha bruta (kg) / O: quantidade de petróleo (kg) / C: quantidade de carbone negro (kg)

Problema: Determinar a quantidade de borracha bruta, petróleo e carbono negro buscando minimizar o custo de produção de 100 kg de borracha.

VARIÁVEIS DE DECISÃO:

R: quantidade de borracha (kg)

O: quantidade de petróleo (kg)

C: quantidade de carbono negro (kg)

FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\text{MINIMIZAR CUSTO} = 4*R + 1*O + 7*C$$

RESTRIÇÕES:

$$\text{Dureza} = 34 + 0,10*R + 0,06*O - 0,3*C + 0,001*R*O + 0,005*O^2 + 0,001*C^2$$

$$\text{Elasticidade} = 17 + 0,35*R - 0,04*O - 0,002*R^2$$

$$\text{Resistência a tensão} = 12,50 - 0,10*O - 0,001*O^2$$

$$25 \leq \text{Dureza} \leq 35$$

$$\text{Elasticidade} \geq 16$$

$$\text{Resistência a tensão} \geq 12$$

$$R + O + C = 100$$

$$R \geq 0 \quad O \geq 0 \quad C \geq 0$$



Resultado viável:

VARIÁVEIS DE DECISÃO	PREÇO (kg)	Quantidade
BORRACHA BRUTA (R)	4	70,00
PETRÓLEO (O)	1	0,00
CARBONO NEGRO (C)	7	30,00

CUSTO (100 Kg)	490,00
----------------	--------

RESTRIÇÕES	VALOR	MÍNIMO	MÁXIMO
DUREZA	32,90	25	35
ELASTICIDADE	31,70	16	
RESISTÊNCIA A TENSÃO	12,50	12	
QUANTIDADE	100,00	100	100



Resultado ótimo:

VARIÁVEIS DE DECISÃO	PREÇO (kg)	Quantidade
BORRACHA BRUTA (R)	4	70,56
PETRÓLEO (O)	1	4,77
CARBONO NEGRO (C)	7	24,67

CUSTO (100 Kg)	459,70
----------------	--------

RESTRIÇÕES	VALOR	MÍNIMO	MÁXIMO
DUREZA	35,00	25	35
ELASTICIDADE	31,55	16	
RESISTÊNCIA A TENSÃO	12,00	12	
QUANTIDADE	100,00	100	100



Programa do curso:

Semana 1: Apresentação da disciplina

Introdução à Programação Linear

Resolução de problemas de PL pelo Método Gráfico

Semana 2: Formulação em programação linear

Resolução computacional de problemas de PL

Semana 3: Resolução de problemas de PL pelo Método Simplex

Semana 4: Problemas com soluções iniciais (Método das 2 fases e o Big-M)

Semana 5: SBPO

Semana 6: Degeneração, Ciclismo e convergência do Método Simplex (2h)

Semana 7: Prova 1

Feed-back Prova 1

Semana 8: Programação por metas

Entrega e correção do Trabalho 1



Programa do curso:

Semana 9: Análise de Sensibilidade

Semana 10: Formulação e Interpretação econômica do problema dual

Teoremas da dualidade

Semana 11: Problema do Transporte, da designação e do transbordo

Semana 12: Modelos de redes: caminho mínimo, fluxo máximo e cobertura

Semana 13: Programação Linear Inteira

Semana 14: Prova 2

Feed-back Prova 2

Semana 15: Aplicações de Pesquisa Operacional

Semana 16: Entrega e correção do Trabalho 2

EXAME



Avaliação:

- 2 Provas (1 por bimestre) – 70% da nota do bimestre
- 2 Trabalhos (individuais) – 30% da nota do bimestre:
 - Formulação
 - Resolução por computador
 - Análise de sensibilidade
 - Interpretação dos resultados

- 1. O TRABALHO FOI ENTREGUE DENTRO DO PRAZO? (30%)**
- 2. A FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO ESTÃO CORRETAS? (40%)**
- 3. A INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS ESTÁ CORRETA? (20%)**
- 4. O RELATÓRIO ESTÁ BEM FEITO? (10%)**

- Exame



Bibliografia:

**Winston, W.L. (2004). Operations Research - 4th.edition.
Brooks/Cole (Thomson).**

Wagner, H.M. (1986), Pesquisa Operacional. Prentice-Hall
do Brasil, 2a. edição.

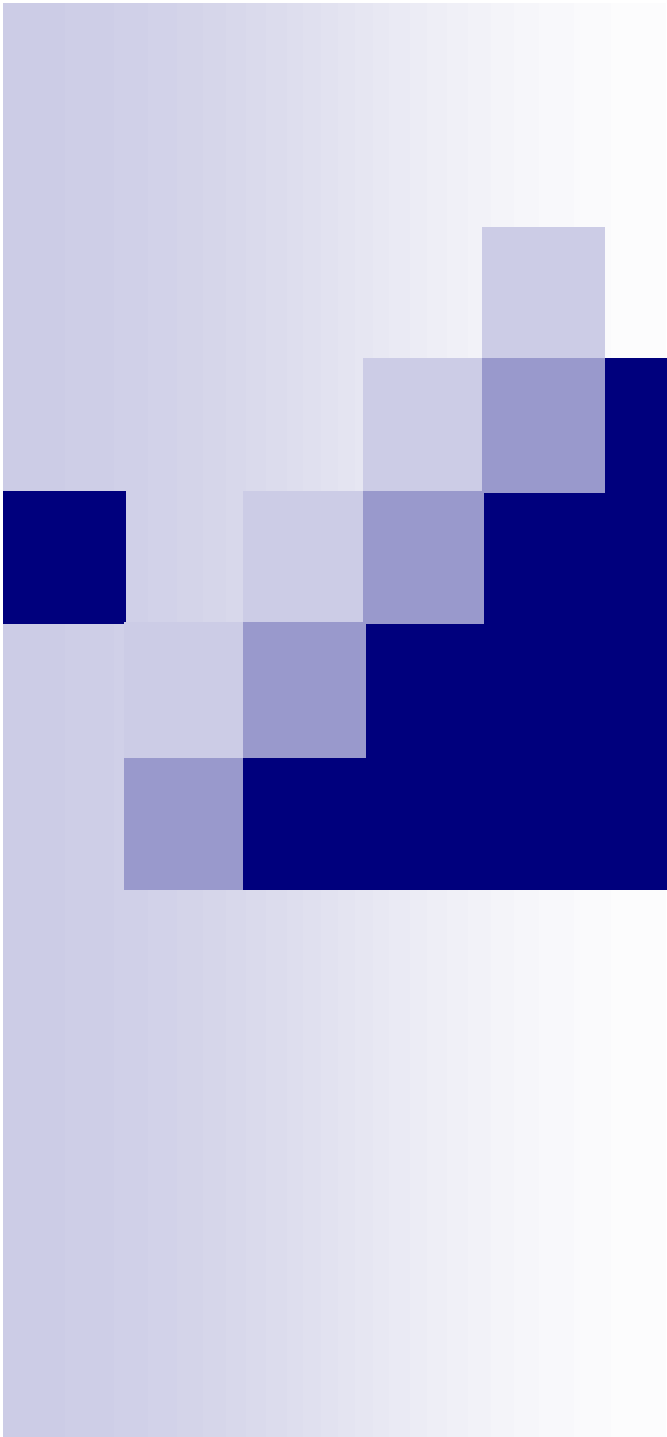
Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (1974), Operations
Research. Holden-day, Inc., 2nd edition.

Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2000)- *Introduction to
Operations Research*, McGraw Hill.



Para casa:

- **Texto: OR Executive Guide (<http://www.scienceofbetter.org/>)**
- **Leitura Winston:**
 - **Capítulo 1 (Introdução à PO)**
 - **Capítulo 2 (Álgebra Linear Básica)**



MOQ – 43 INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



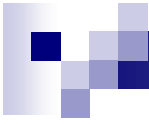
Programação Linear:

- Técnica que se propõe otimizar (maximizar ou minimizar) o valor de uma função linear, respeitando um conjunto de restrições (equações ou inequações) lineares.
 - George B. Dantzig (1947): planejamento logístico (suprimentos)
 - Objetivo: tratar problemas de alocação de recursos - determinar o modo mais eficiente de utilizar os recursos limitados;
 - Linear: implica que todas as funções do problema são lineares.
- Um modelo de programação linear (PL) reduz um sistema real a um conjunto de equações ou inequações em que pretendemos otimizar uma função objetivo.



Exemplos de Problemas de Decisão resolvidos por PL

- **Se tanto a Matéria Prima quanto a Mão de Obra são limitados, qual a quantidade produtos que maximiza o lucro da empresa?**
- **Se um dado combustível é obtido de uma mistura de produto de preços variados, qual a composição de menor custo com poder calorífico suficiente?**
- **Se existem vários caminhos que ligam duas cidades, qual é a que propicia o mínimo de gasto de combustível?**
- **Se existem vários ativos financeiros, qual a combinação que melhor reflete o compromisso entre o risco e o retorno?**



Problema de programação linear:

Considere o seguinte problema:

$$(Minimizar / Maximizar) \quad Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$\text{Sujeito a :} \quad b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \geq c_1$$

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \geq c_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \dots + b_{kn}x_n \geq c_k$$

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$$

Z: função objetivo (função critério)

a_i : coeficientes da função objetivo (custo / lucro), $i = 1, \dots, n$

x_i : variáveis de decisão, $i = 1, \dots, n$

b_{ji} : coeficientes tecnológicos, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$

c_j : constantes do lado direito (right-hand-side), $j = 1, \dots, k$



Exemplo de problema de PL (mix de produção):

Uma empresa fabrica 2 tipos de porta – de madeira e de alumínio. Cada porta passa por 3 operações: corte, montagem e acabamento. O tempo gasto em cada uma dessas etapas por cada tipo de porta é:

	Corte	Montagem	Acabamento
Madeira	1,5 h/porta	3,0 h/porta	1 h/porta
Alumínio	4,0 h/porta	1,5 h/porta	1 h/porta
Disponibilidade	24 h	21 h	8 h

Determine a quantidade de portas (de madeira e de alumínio) a serem fabricadas para maximizar o lucro da empresa, respeitando os recursos disponíveis (horizonte do planejamento: 1 dia).

Lucro unitário: porta de madeira: R\$4,00

porta de alumínio: R\$6,00



Exemplo de problema de PL (mix de produção):

Variável de decisão:

$x_i \rightarrow$ quantidade do produto i (i = madeira, alumínio) que serão fabricados

Função Objetivo:

Maximizar Lucro = $Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$

Restrições: capacidade produtiva

corte $\rightarrow 1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 24$

montagem $\rightarrow 3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 21$

acabamento $\rightarrow 1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 8$

Restrições: não negatividade

$x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} \geq 0$



Hipóteses em Programação Linear:

- Proporcionalidade: todos os retornos / custos e recursos utilizados variam proporcionalmente a variável de decisão (não há economia de escala);
- Aditividade: o efeito total de quaisquer duas variáveis é a soma dos efeitos individuais (não há sinergia ou efeito de substituição). Exemplo: o custo total é a soma dos custos individuais;
- Divisibilidade: as variáveis de decisão podem assumir valores fracionados. Se essas variáveis só puderem assumir valores inteiros o problema é de programação inteira (PI);
- Certeza (Determinístico): todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas (não são variáveis aleatórias);

Formas de Representação:

- Formato padrão: todas as restrições são igualdades e todas as variáveis são não-negativas.
- Formato canônico: (problema de minimização) todas as variáveis são não-negativas e todas as restrições são do tipo $\geq$.

	MINIMIZATION PROBLEM	MAXIMIZATION PROBLEM
STANDARD FORM	Minimize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$	Maximize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$
CANONICAL FORM	Minimize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$	Maximize $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ Subject to $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

Manipulação do problema:

➤ Inequações e Equações:

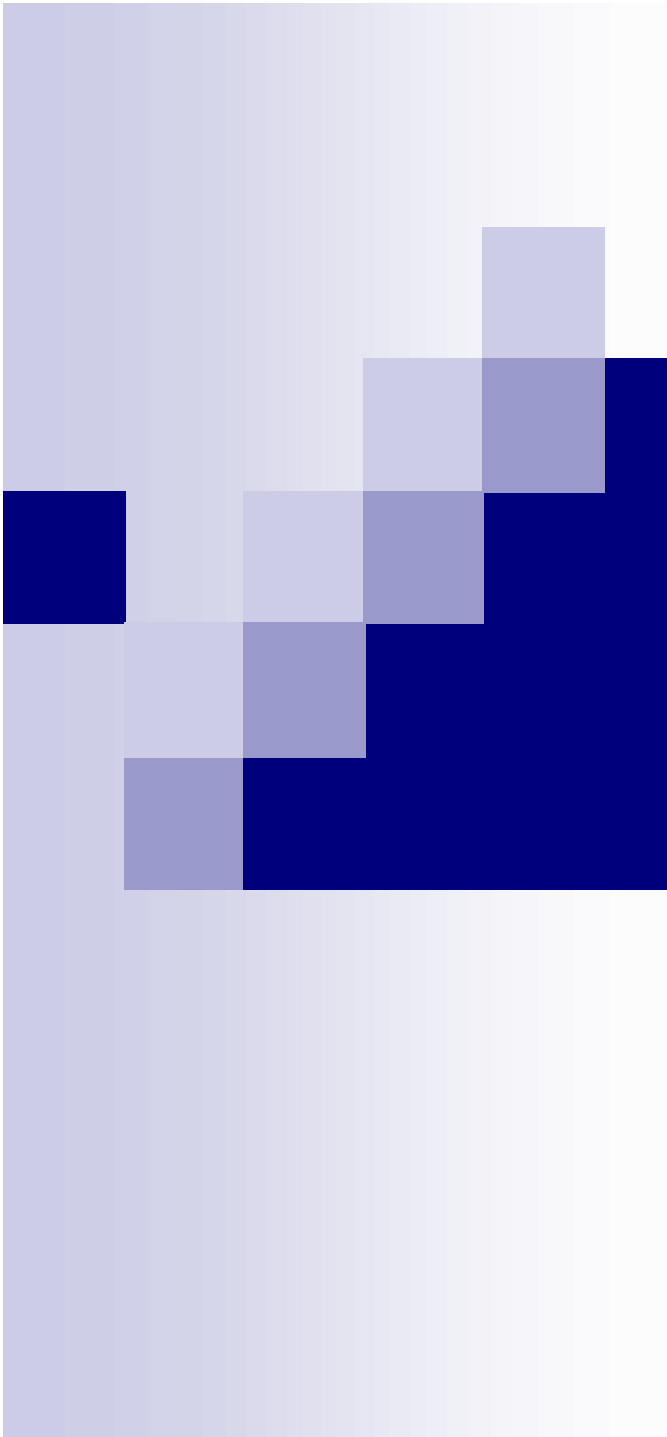
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i \end{array} \right\} \mathbf{x_{n+1}: \text{variável de folga}}$$

➤ Maximização e Minimização: $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$$\textit{Maximizar } Z = \textit{Minimizar } -Z$$

➤ Não-negatividade: x_j (irrestrito) $\rightarrow x_j = x'_j - x''_j \quad x'_j, x''_j \geq 0$



MOQ – 43 PL – RESOLUÇÃO PELO MÉTODO GRÁFICO

Professor: Rodrigo A. Scarpel

rodrigo@ita.br

www.mec.ita.br/~rodrigo



Objetivo:

- ✓ Descrever o procedimento gráfico / geométrico para resolver problemas de programação linear
- ✓ Obter a solução ótima pelo gradiente da função objetivo
- ✓ Obter a solução ótima enumerando os pontos extremos
- ✓ Ilustrar condições especiais:
 - Múltiplas soluções ótimas
 - Restrições redundantes
 - Solução ilimitada
 - Solução inviável



Problema de mix de produção:

Uma empresa fabrica 2 tipos de porta – de madeira e de alumínio. Cada porta passa por 3 operações: corte, montagem e acabamento. O tempo gasto em cada uma dessas etapas por cada tipo de porta é:

	Corte	Montagem	Acabamento
Madeira	1,5 h/porta	3,0 h/porta	1 h/porta
Alumínio	4,0 h/porta	1,5 h/porta	1 h/porta
Disponibilidade	24 h	21 h	8 h

Determine a quantidade de portas (de madeira e de alumínio) a serem fabricadas para maximizar o lucro da empresa, respeitando os recursos disponíveis (horizonte do planejamento: 1 dia).

Lucro unitário: porta de madeira: R\$4,00

porta de alumínio: R\$6,00



Problema de mix de produção:

Variável de decisão:

$x_i \rightarrow$ quantidade do produto i (i = madeira, alumínio) que serão fabricados

Função Objetivo:

Maximizar Lucro = $Z = 4,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$

Restrições: capacidade produtiva

corte $\rightarrow 1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 24$

montagem $\rightarrow 3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 21$

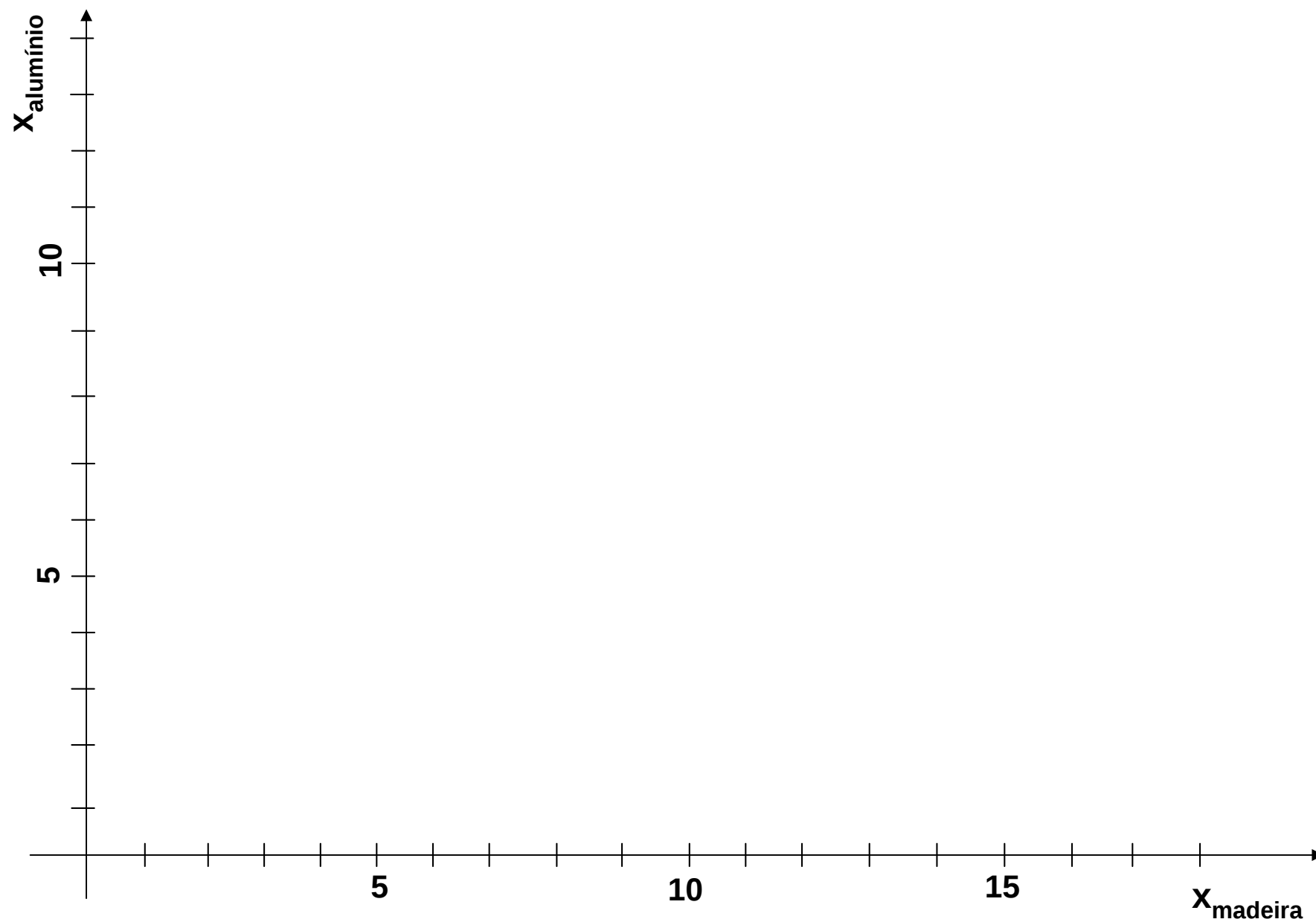
acabamento $\rightarrow 1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 8$

Restrições: não negatividade

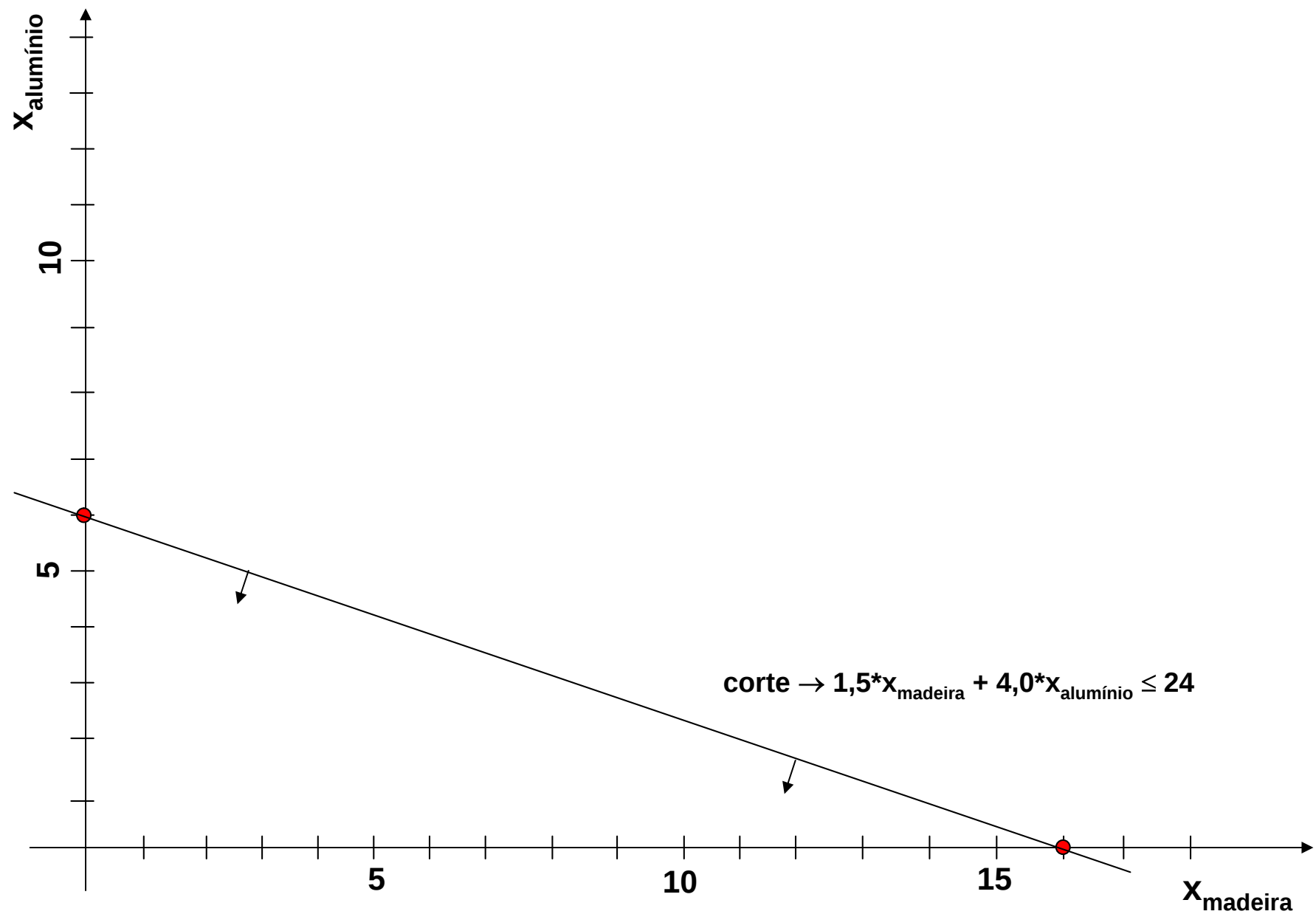
$x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} \geq 0$



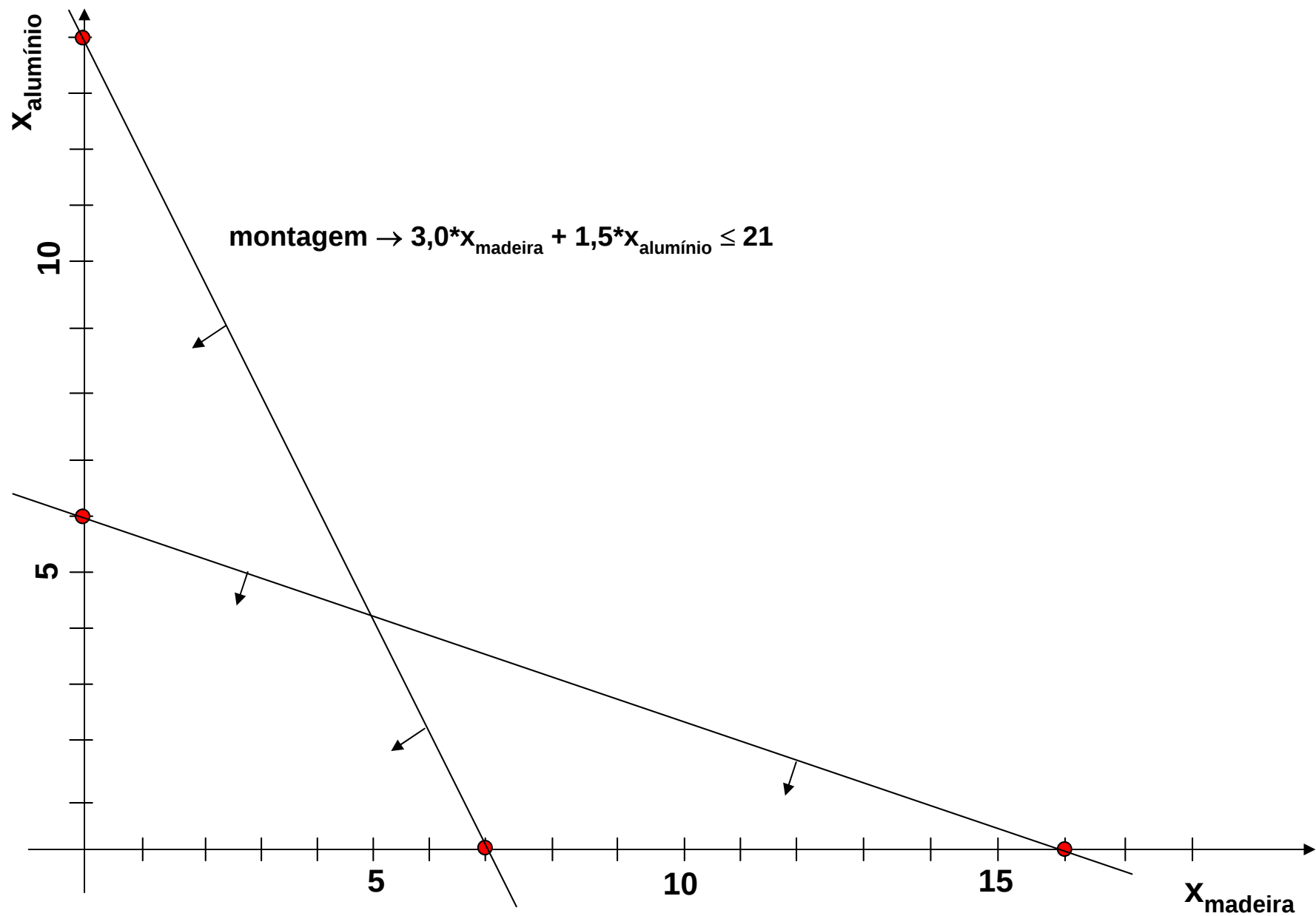
Problema de mix de produção:



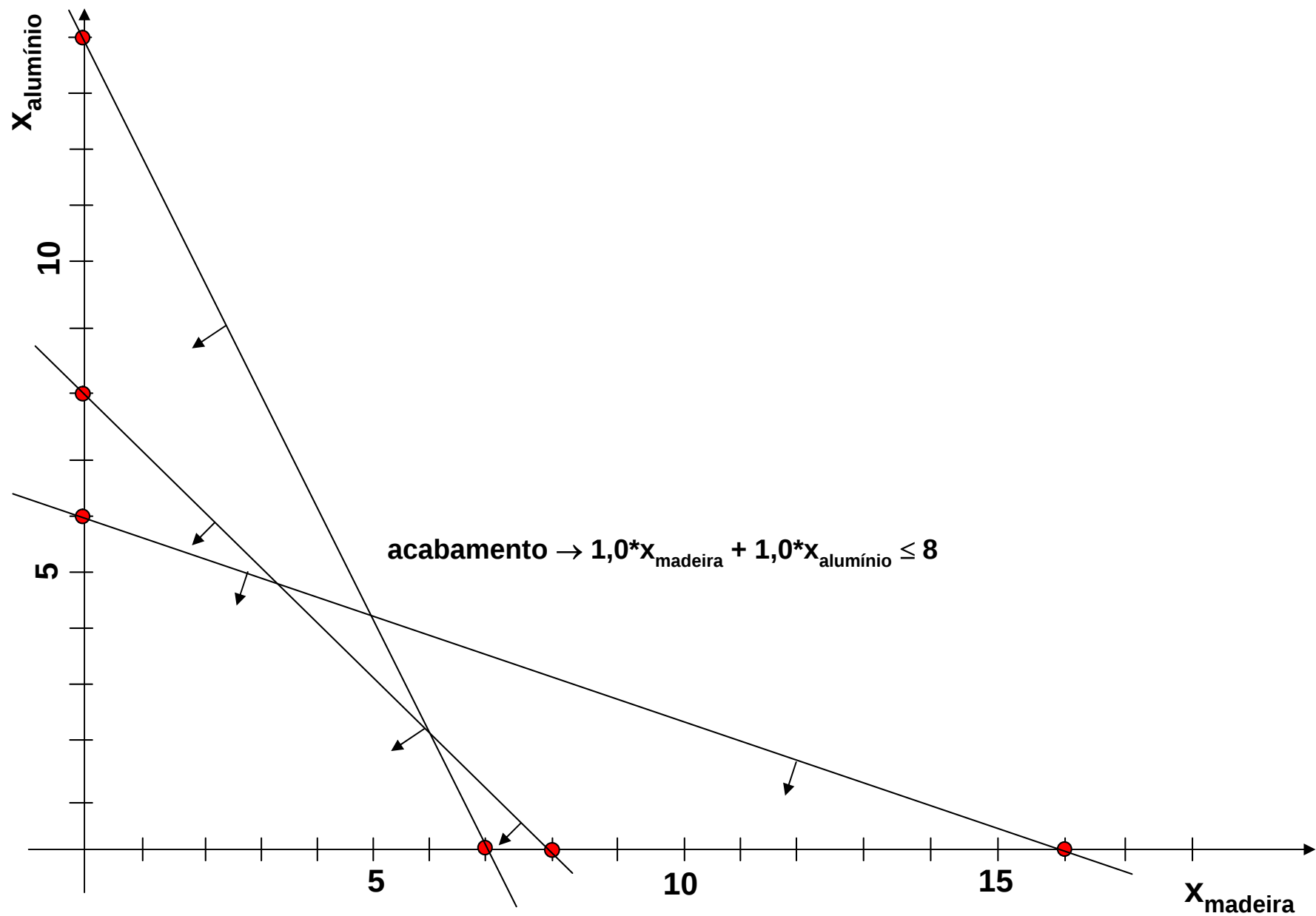
Problema de mix de produção:



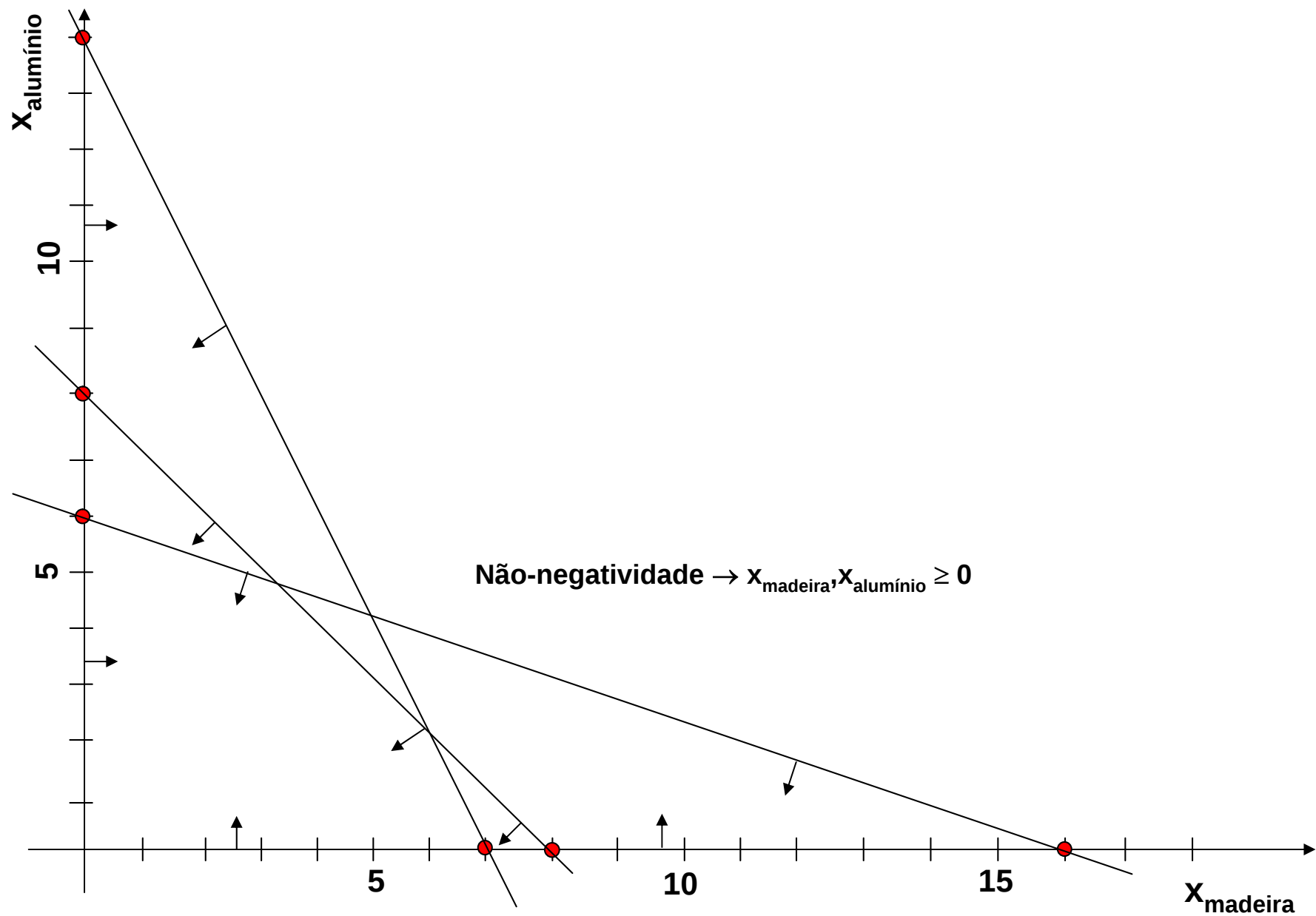
Problema de mix de produção:



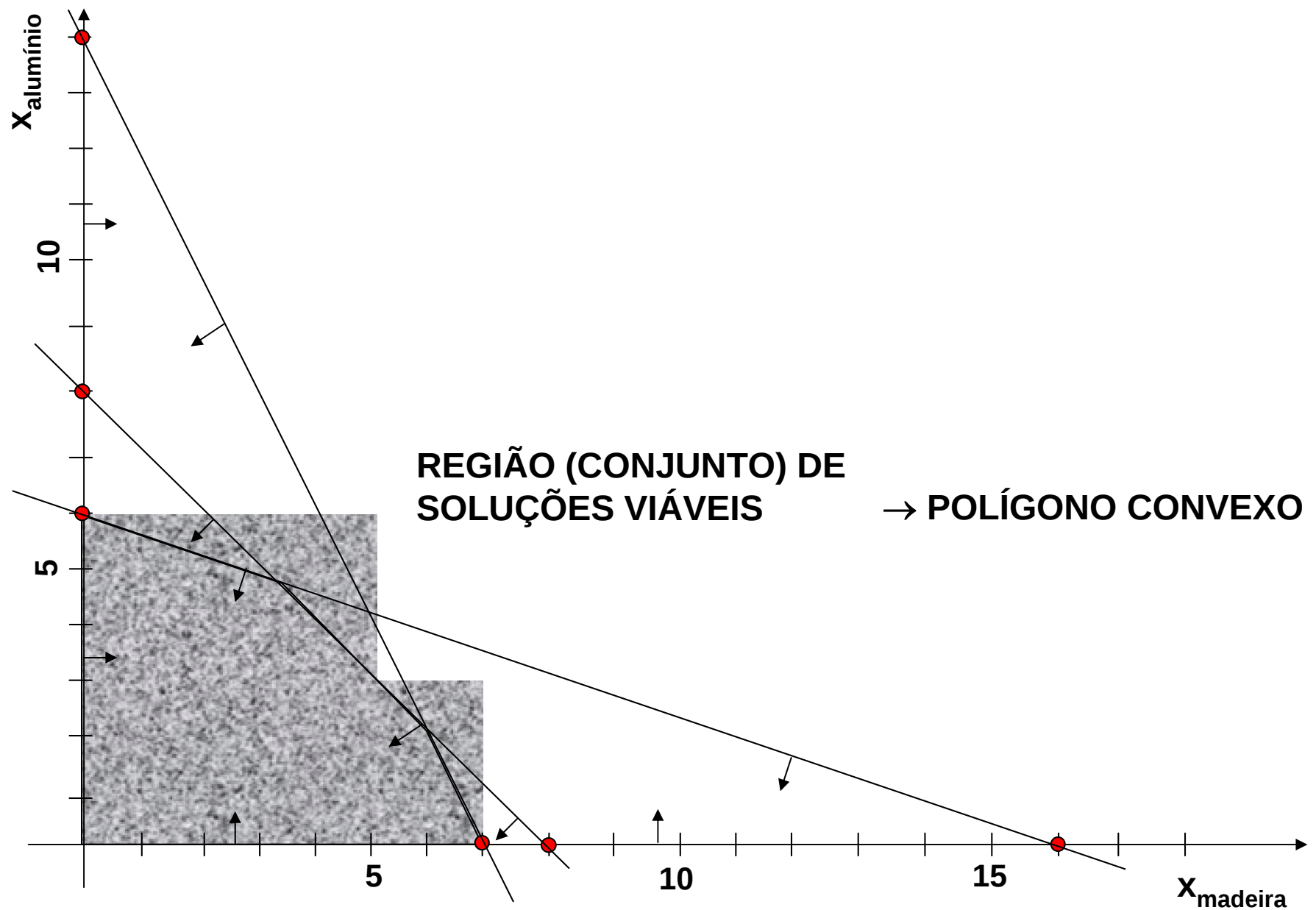
Problema de mix de produção:



Problema de mix de produção:

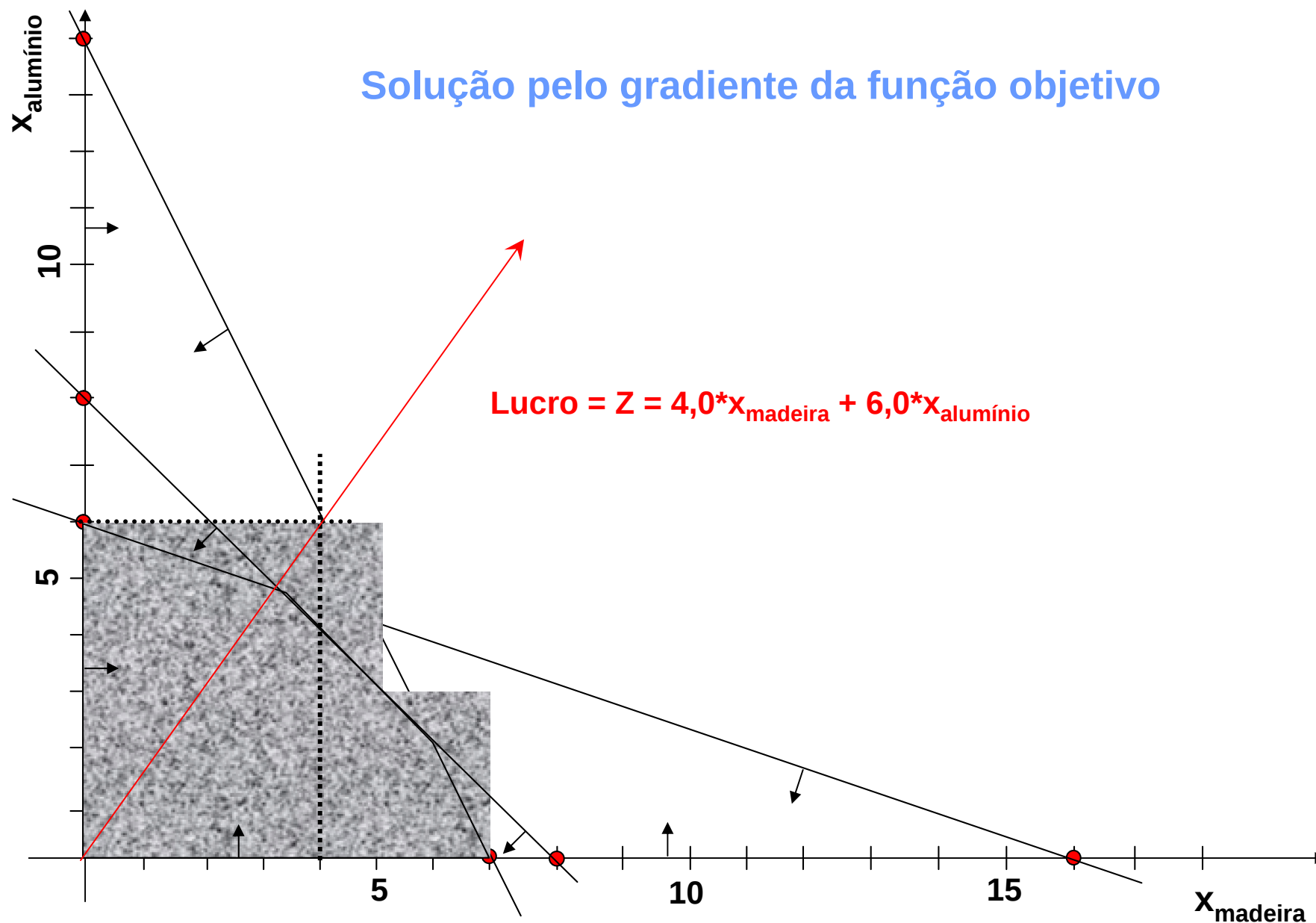


Problema de mix de produção:

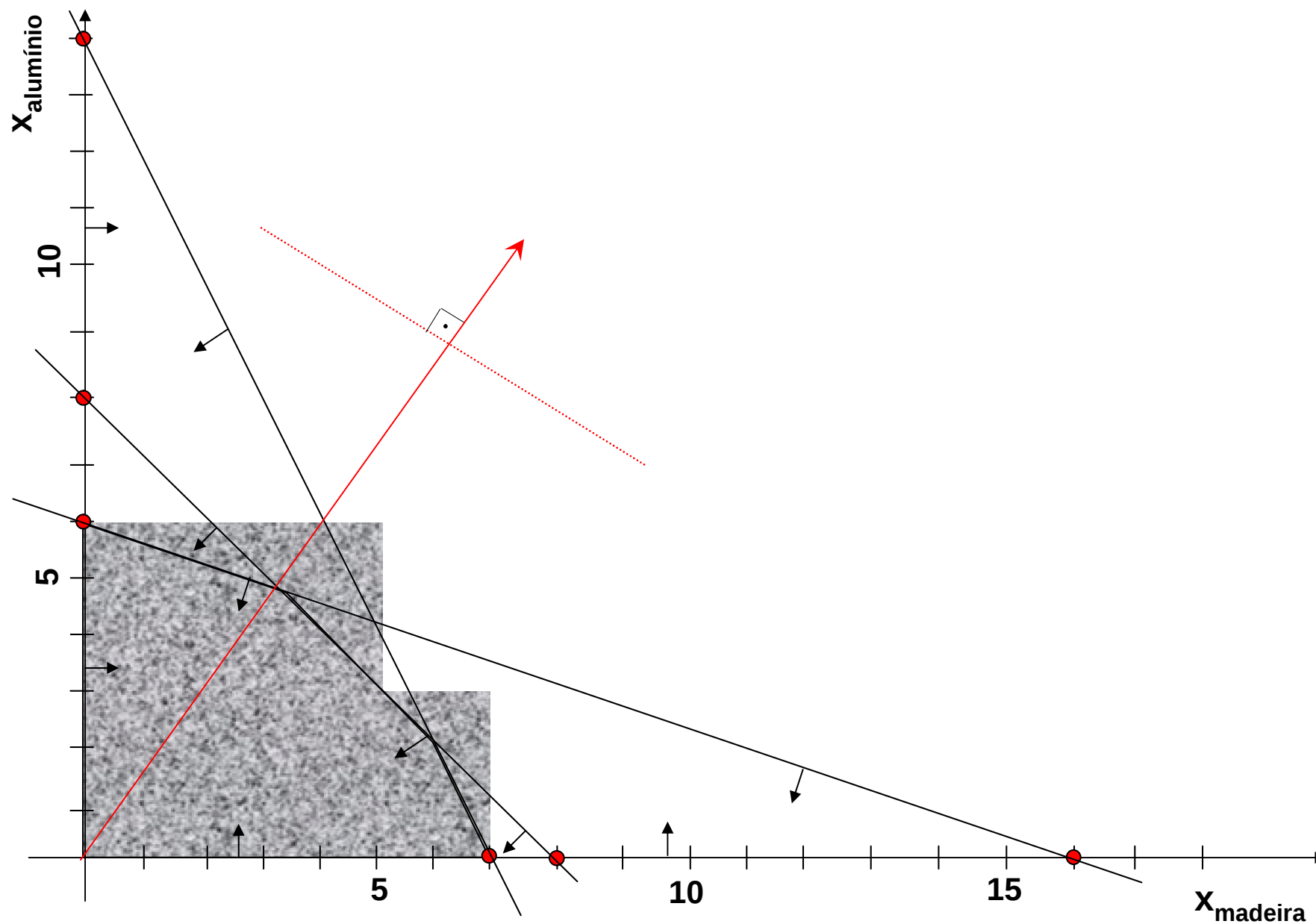


Problema de mix de produção:

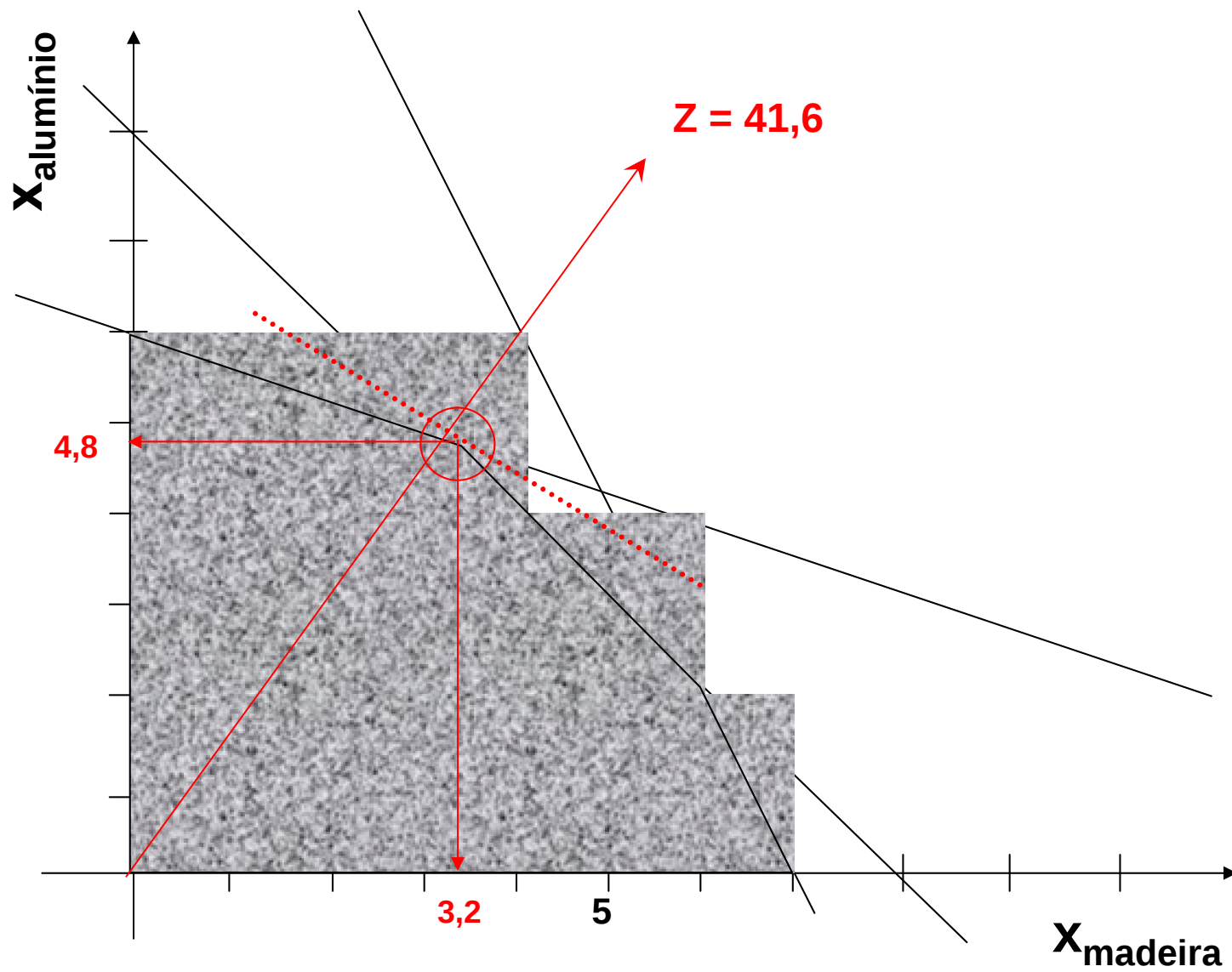
Solução pelo gradiente da função objetivo



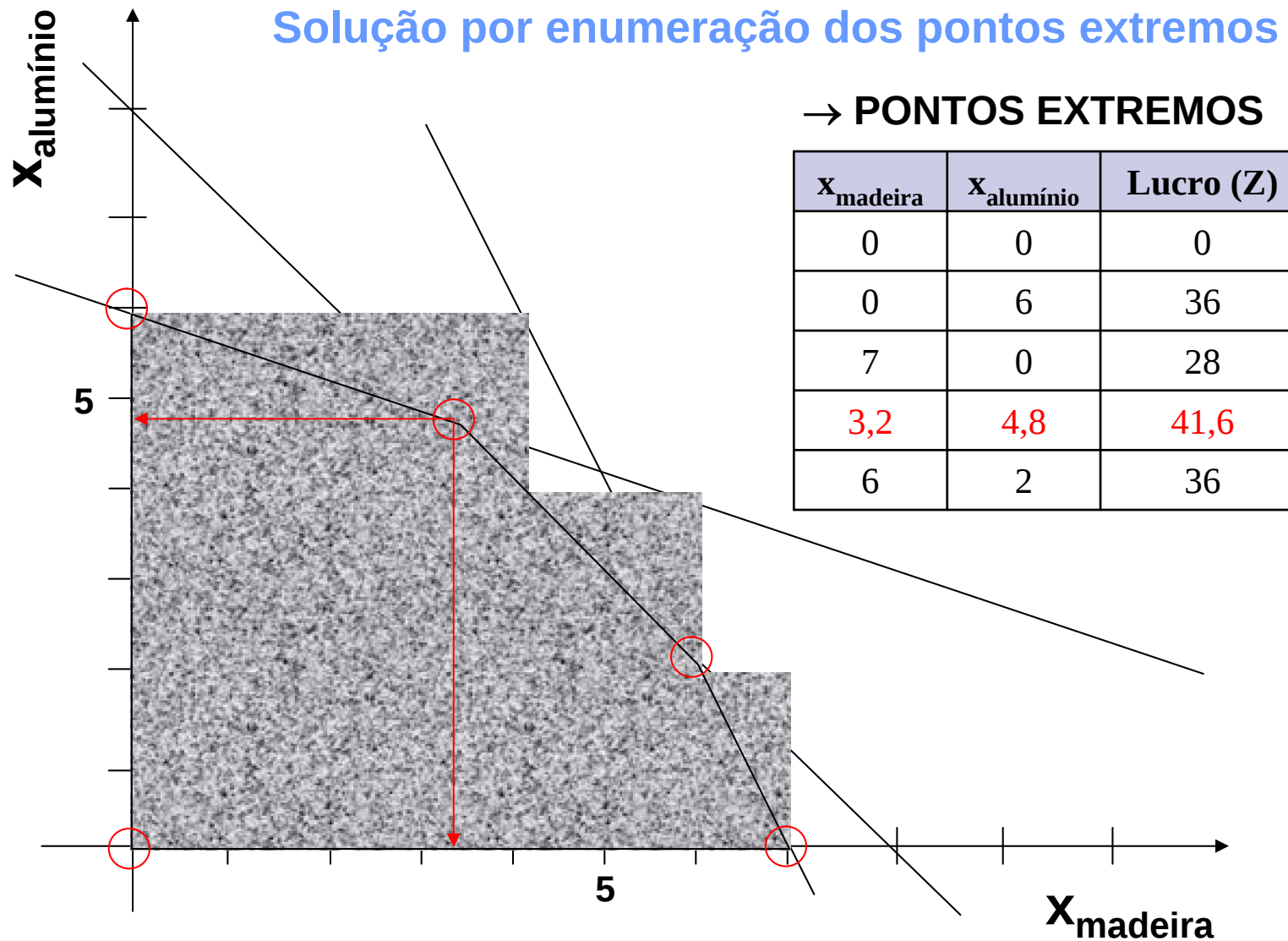
Problema de mix de produção:



Problema de mix de produção:

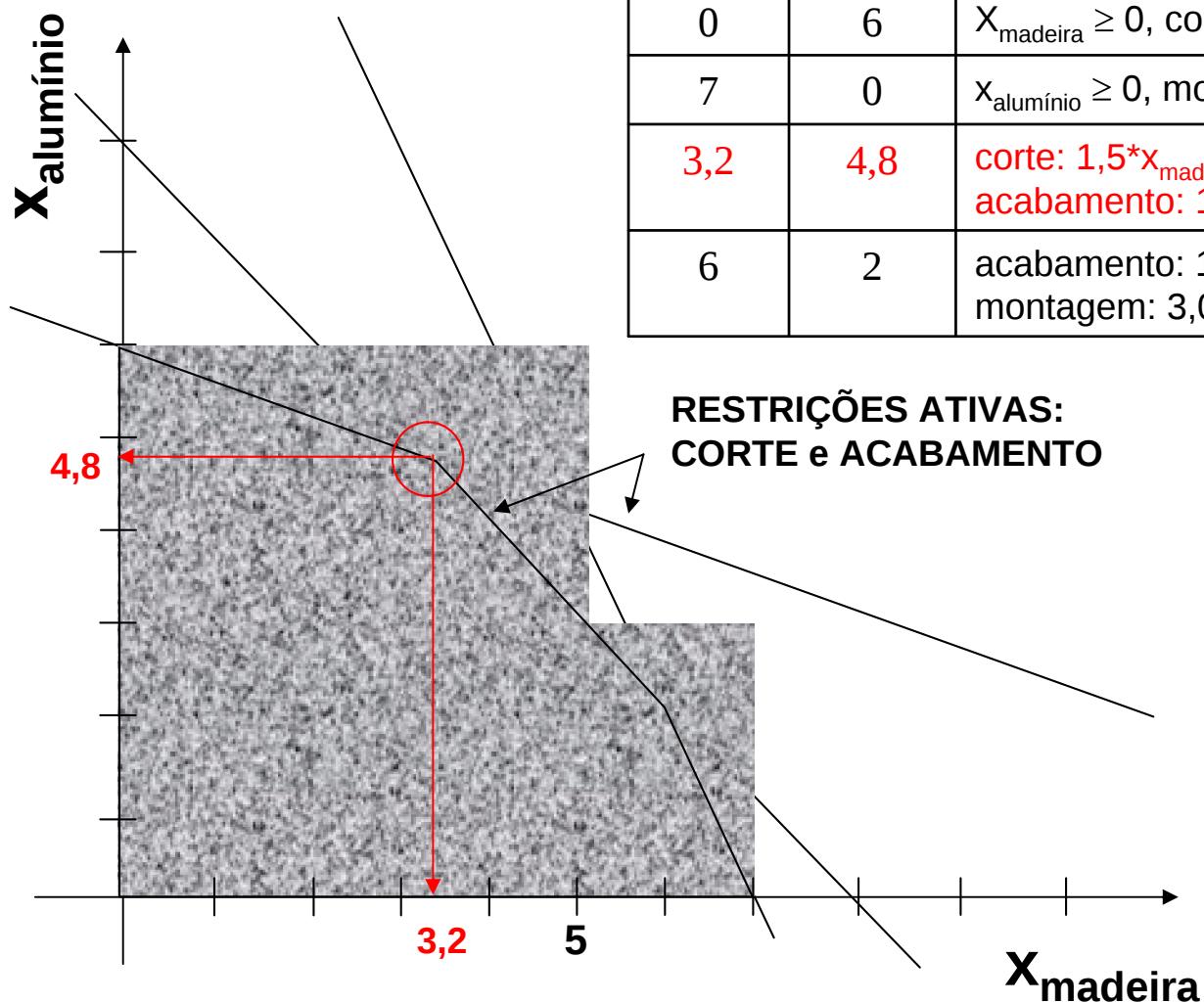


Problema de mix de produção:



Problema de mix de produção:

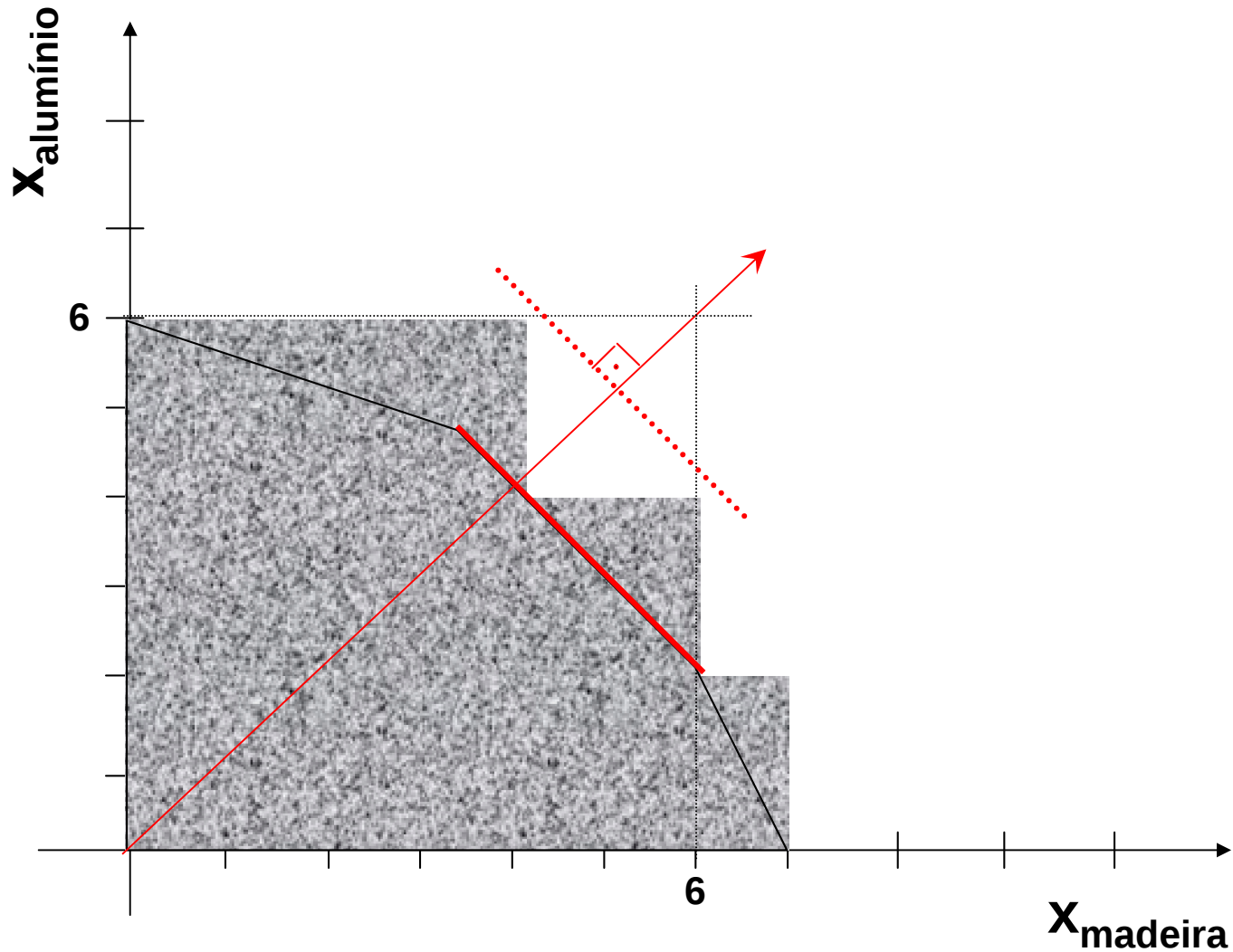
x_{madeira}	$x_{\text{alumínio}}$	Restrições ativas
0	0	$x_{\text{madeira}}, x_{\text{alumínio}} \geq 0$
0	6	$x_{\text{madeira}} \geq 0$, corte: $1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 24$
7	0	$x_{\text{alumínio}} \geq 0$, montagem: $3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 21$
3,2	4,8	corte: $1,5 \cdot x_{\text{madeira}} + 4,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 24$, acabamento: $1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 8$
6	2	acabamento: $1,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,0 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 8$, montagem: $3,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 1,5 \cdot x_{\text{alumínio}} \leq 21$



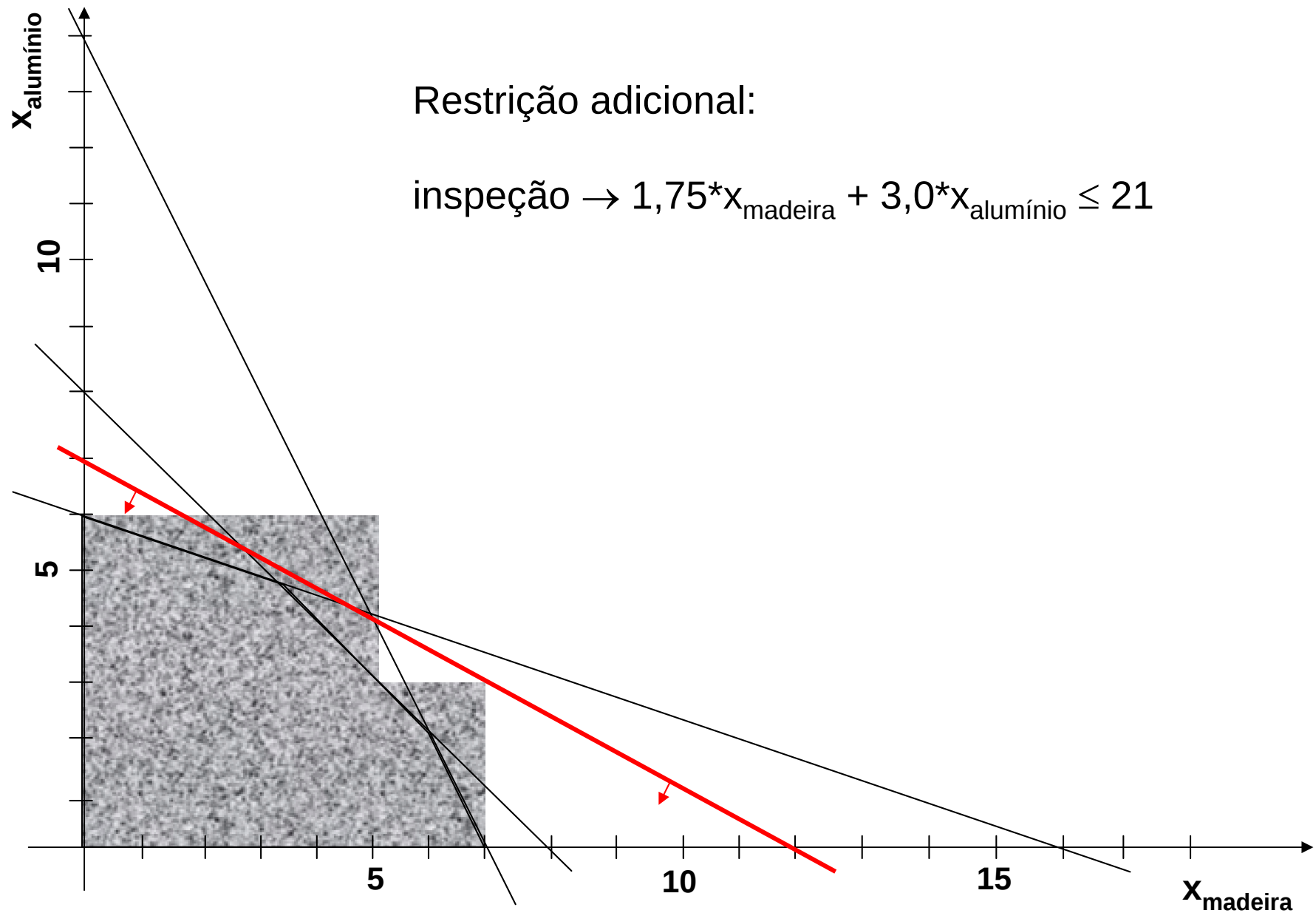
Obs: Montagem - tempo ocioso: 4,2 h/dia

Condições especiais – múltiplas soluções ótimas:

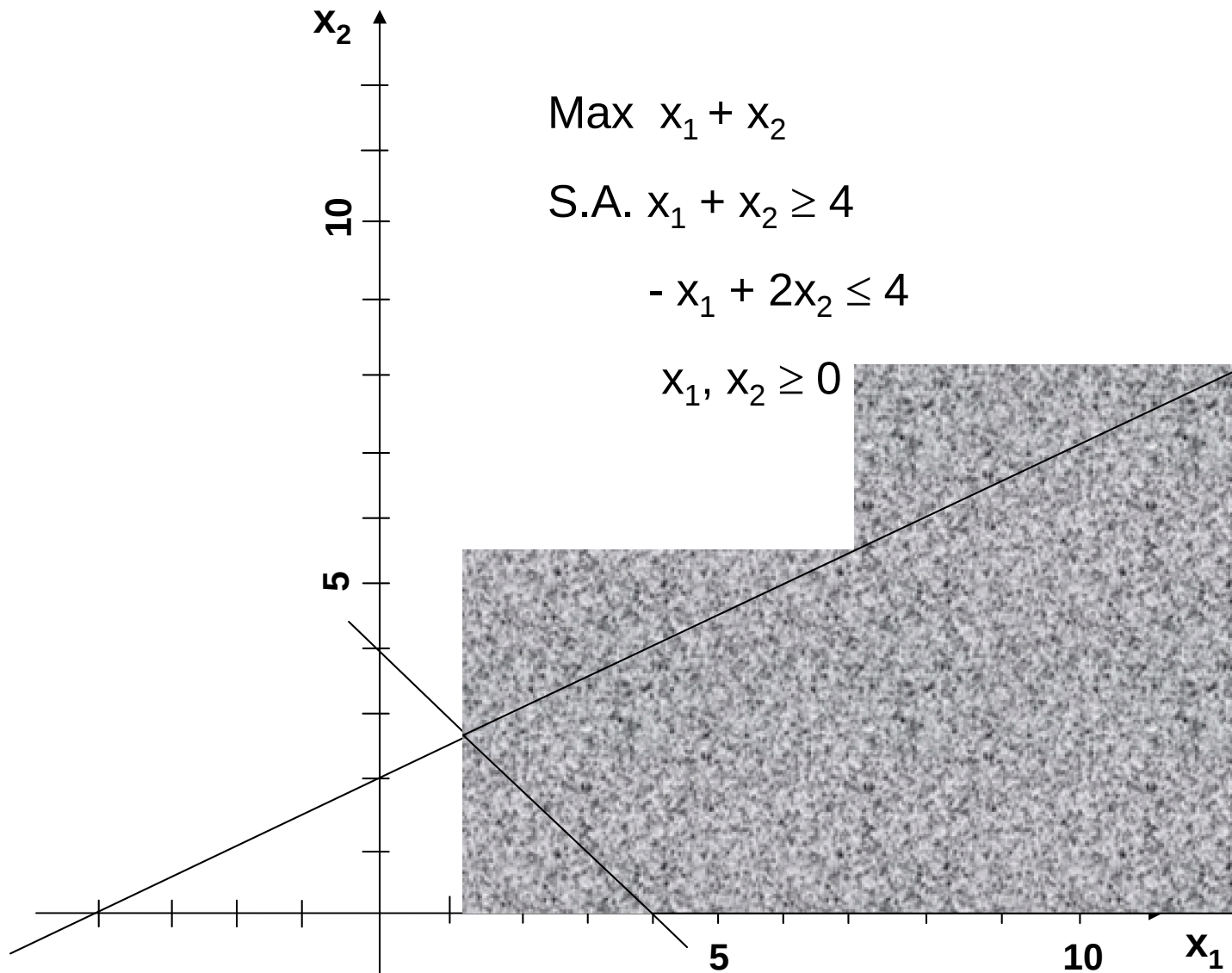
Maximizar Lucro = $Z = 6,0 \cdot x_{\text{madeira}} + 6,0 \cdot x_{\text{alumínio}}$



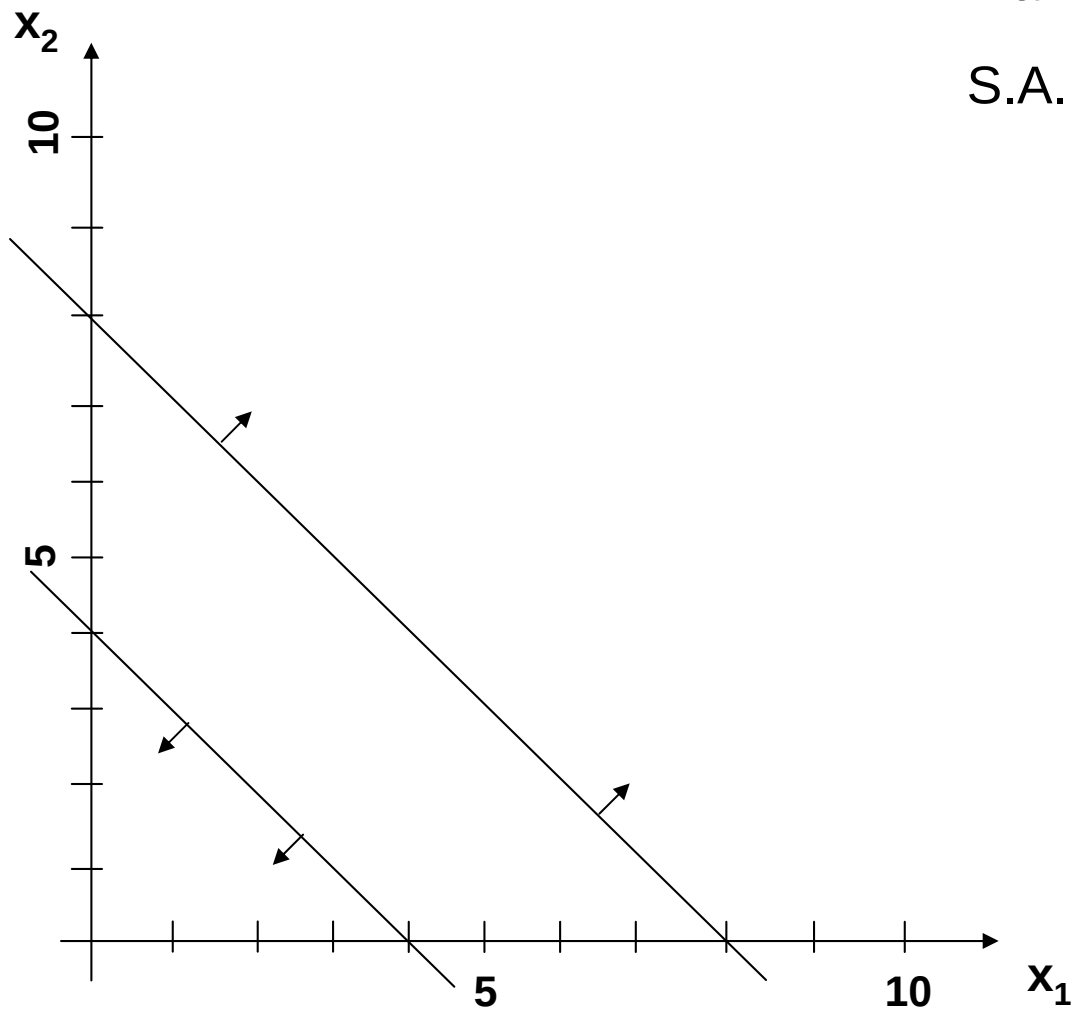
Condições especiais – restrições redundantes:



Condições especiais – solução ilimitada:



Condições especiais – solução inviável:



$$\text{Max } x_1 + x_2$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para casa:

- Leitura Winston: 3.1 a 3.3
- Lista de Exercícios 1

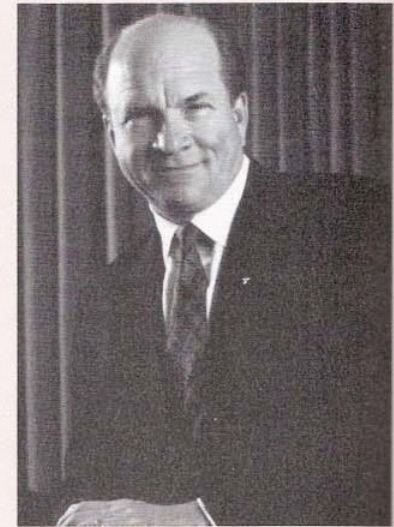
CONCEPTS IN CONTEXT

HOW LINEAR PROGRAMMING IMPROVES AIRCRAFT OPERATIONS*

Linear programming is used in a wide variety of industries and firms. Consider, for example, the case of Delta Airlines, which uses linear programming to reduce the costs of moving flight crews from place to place. Because of work rules limiting the number of hours per day that crew members can fly, as well as waiting time in airports and other factors, a substantial portion of the time of pilots and flight attendants is essentially unproductive, from the point of view of the airline.

In keeping with Delta's ongoing efforts to reduce unproductive time and costs, attention was focused on the problem of scheduling crews (8,500 pilots and 17,600 flight attendants) to cover approximately 4,900 flight segments daily to more than 220 cities worldwide, using more than 550 aircraft of eight types flown from a dozen different crew bases. To help solve this very large and complex problem, Delta introduced a new software module, developed in-house. This linear programming software uses interior point methodology. Additionally, it provides the optimal value without having to generate the billions of possibilities; this makes it extremely useful in crew scheduling to analyze different schedules and changes in work rules.

The results of this new module have provided Delta with an estimated annual saving of about \$20 million. In addition to the monetary savings, there are improvements in quality-of-life issues since crew members now have schedules that take them away from their home bases for less time than before. Along with scheduling crews, Delta is currently using linear programming to



Ronald W. Allen, Chairman of the Board and CEO, Delta Air Lines

help address a variety of planning issues, including maintenance of aircraft, fleet assignment, and labor planning.

Government agencies, like firms, use linear programming to help solve a variety of problems concerning aircraft operations. For example, the Air Force Military Aircraft Command has used linear programming to help perform aircraft operations more efficiently. In some problems involving the scheduling of military support aircraft, over 300,000 variables and almost 15,000 constraints were considered. While problems of this sort are far more complex than those considered in this chapter, the basic concepts are no different from those taken up here.

*These examples were described in D. Wertheiser, "Karmarkar Algorithm," National Technological University, 1991. Also, Delta Airlines provided some of this material.