

## A PROGRAMAÇÃO LINEAR E O PROCESSO DE DECISÃO

### INTRODUÇÃO:

A programação linear é uma das muitas técnicas analíticas recentemente desenvolvidas que se têm mostrado úteis na resolução de certos tipos de problemas empresariais. Esses métodos quantitativos de resolução de problemas, como muitos aplicados na pesquisa operacional, são baseados em conceitos matemáticos e estatísticos. Considerando que a programação linear seja um “modelo”, um método apropriado de estudo seria estruturá-la dentro da estrutura mais extensa do processo de tomada de decisão administrativa.

Objetivos para o estudo da programação linear :

- a) reconhecer os problemas que passíveis de análise pelo modelo;
- b) auxiliar o analista no estágio inicial da investigação;
- c) avaliar e interpretar inteligentemente os resultados;
- d) aplicar os resultados com a confiança que é adquirida somente com a compreensão dos problemas e dos resultados envolvidos.

Áreas de aplicação da programação linear:

- a) problemas de alocação, ou seja, problemas envolvidos na alocação de recursos escassos entre fins alternativos, de acordo com algum critério.
- b) Problemas complexos de alocação que não podem ser resolvidos satisfatoriamente com as técnicas analíticas convencionais.

Alguns exemplos de problemas de alocação:

- a) determinação dos produtos a serem fabricados, a composição da produção, planejada levando em consideração a demanda esperada, a adequabilidade e as capacidades da produção e facilidades de distribuição, as diretrizes administrativas, tais como a política sobre os produtos levados até o término da linha de produção. Com o objetivo de maximizar os lucros.
- b) Problemas de mistura ou combinação de ingredientes utilizados na fabricação dos produtos, tendo em vista a disponibilidade e os custos relativos dos ingredientes, qual a combinação que resultará no custo mínimo de material por unidade do produto final?
- c) Programação da produção e planejamento de estoque, procura-se qual o programa de produção e quais os níveis planejados de estoque durante o próximo período planejado que satisfarão à demanda esperada e também resultarão em custo mínimo?
- d) Alimentação das máquinas, pergunta-se quais alocações de capacidade da máquina disponível às séries de ordens que resultarão no custo mínimo?
- e) Problemas de transporte e distribuição física, pergunta-se qual o plano físico de distribuição que estará tanto dentro das restrições de capacidade como da

|                                    |                                  |   |
|------------------------------------|----------------------------------|---|
| CENTRO UNIVERSITÁRIO NOVE DE JULHO |                                  | 2 |
| DISCIPLINA: PESQUISA OPERACIONAL   | PROF.: LUIS ANTONIO CCOPA YBARRA |   |

demanda e que ao mesmo tempo minimize os custos de produção e de distribuição durante o período de planejamento.

## MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Os procedimentos de cálculo matemático de programação linear dependem em parte de vários métodos de programação adotados em determinado problema. O caso básico, ou geral, é chamado MÉTODO SIMPLEX, porque é baseado no algoritmo simplex. Certos tipos de problemas de alocação podem ser resolvidos pelas versões especiais, menos complexas, do método Simplex, conhecidas como métodos Gráficos e de Transporte.

## FORMULAÇÃO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Quando da análise de um problema, tentando enquadrá-lo em um modelo de programação linear é fundamental que se consiga distinguir, de um lado, quais são as variáveis fora do controle do analista, ou parâmetros, cujos valores já estão fixados, e, de outro, quais são as variáveis de decisão, ou seja, aquelas cujo valor se quer conhecer.

A solução de um modelo dará exatamente o valor dessas variáveis de decisão. As variáveis de decisão compõem tanto a função objetivo como as restrições e são em geral designadas por letras como  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc., ou por uma letra indexada como  $x_1$ ,  $x_2$ , etc. A função objetivo é uma expressão onde cada variável de decisão é ponderada por algum parâmetro (como por exemplo lucro unitário).

## EXEMPLO DE FORMULAÇÃO : MAXIMIZAÇÃO

Consideremos o caso da indústria de móveis Fresão, que ilustra um problema de composição de produto.

A Fresão produz, entre outros artigos, dois tipos de conjunto para sala de jantar: o conjunto Beatrice e o conjunto Anamaria.

A Fresão está preparando sua programação semanal de produção para os dois conjuntos. Sabe-se que, embora não haja restrições no tocante à demanda do conjunto Beatrice (dentro das limitações de produção atuais) para o conjunto Anamaria dificilmente a demanda semanal ultrapassará 8 unidades.

A fabricação dos dois conjuntos é dividida em dois grandes blocos de operações:

Preparação (consistindo do corte da madeira e preparação para montagem) e Acabamento (consistindo da montagem dos conjuntos e acabamento final).

Em face dos outros produtos existentes, a Fresão não poderá alocar mais de 100 horas para a preparação e 108 horas para o acabamento durante a semana. O conjunto Beatrice

exige 5 horas para a preparação e 9 horas para o acabamento, enquanto que para o conjunto Anamaria esses números são de 10 e 6 horas respectivamente.

A Fresão deve decidir quantas unidades de cada conjunto devem ser fabricadas, levando em conta que o conjunto Beatrice fornece um lucro unitário de R\$ 4000,00 enquanto que para o conjunto Anamaria o lucro unitário é de R\$ 5000,00.

## SOLUÇÃO

Na formulação de modelos de programação linear, é bastante útil reunirmos os dados em uma tabela, de modo que se recorra a todo momento ao enunciado do problema, no caso da Fresão, a maioria dos dados relevantes estão na tabela abaixo:

| conjunto | Horas preparação | Horas acabamento | Demanda máxima | Lucro unitário |
|----------|------------------|------------------|----------------|----------------|
| Beatrice | 5                | 9                | Não há         | R\$ 4000,00    |
| Anamaria | 10               | 6                | 8              | R\$ 5000,00    |

As variáveis de decisão estão claras no enunciado. Deseja-se saber quantas unidades de cada conjunto devem ser produzidas. Chamemos de:

X = número de unidades do conjunto Beatrice

Y = número de unidades do conjunto Anamaria

O estabelecimento da função objetivo vem a seguir. Como cada unidade de conjunto Anamaria contribui com R\$ 4000,00 de lucro, contra R\$ 5000,00 de cada conjunto Anamaria, o lucro total derivado de

X unidades do primeiro conjunto e Y unidades do segundo conjunto será dado por:

$$4000x + 5000y$$

Expressão esta que desejamos maximizar

Seguindo este raciocínio semelhante, podemos montar as restrições.

O número total de horas de preparação que se gastará para os dois conjuntos é

$$5x + 10y$$

que não pode ser maior que o máximo de 100 horas que estão disponíveis para a preparação

logo, a primeira restrição fica

$$5x + 10y \leq 100$$

|                                    |                                  |   |
|------------------------------------|----------------------------------|---|
| CENTRO UNIVERSITÁRIO NOVE DE JULHO |                                  | 4 |
| DISCIPLINA: PESQUISA OPERACIONAL   | PROF.: LUIS ANTONIO CCOPA YBARRA |   |

para o acabamento, a restrição será escrita como

$$9x + 6y \leq 108$$

a última restrição diz respeito à demanda máxima dos conjuntos Anamaria, que não pode ultrapassar a 8 unidades semanais

$$y \leq 8$$

finalmente, todo problema de programação linear possui as chamadas condições de não negatividade, segundo as quais as variáveis de decisão só podem assumir valores positivos ou nulos:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

repare que não teria sentido algum em se pensar num número negativo de qualquer um dos dois conjuntos em questão. Aliás, a maioria dos programas de computador disponíveis para a programação linear assume automaticamente as condições de não negatividade, não havendo necessidade de incorporá-las aos dados de entrada na máquina.

Resumindo, o problema da indústria de móveis Fresão, formulado completamente segundo um modelo de programação linear é o seguinte;

Maximizar  $4000x + 5000y$

Sujeito a

$$5x + 10y \leq 100 \text{ (preparação)}$$

$$9x + 6y \leq 108 \text{ (acabamento)}$$

$$1y \leq 8 \text{ (demanda de conjuntos)}$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

o problema da indústria Fresão admite como solução  $x = 8$  e  $y = 6$ , levando a um valor máximo da função objetivo de

$$4000(8) + 5000(6) = \text{R\$ } 62.000,00$$

se os valores  $x = 8$  e  $y = 6$  forem substituídos nas restrições, veremos que as horas de preparação e acabamento são totalmente esgotadas pela produção. Ao se tentar outros valores de  $x$  e  $y$  verifica-se que sempre conduzem a um valor da função objetivo menor que R\$ 62.000,00.

OBSERVAÇÃO: Embora pareça desnecessário escrever  $1y \leq 8$  e não simplesmente  $y \leq 8$ , que também está correto, é conveniente que acostumemos a colocar coeficiente 1 ou mesmo 0 (zero, correspondente a uma variável que não compareça numa expressão) dado que isso será de muita utilidade quando da solução dos problemas pelo algoritmo simplex, que será visto brevemente.

### EXEMPLO DE FORMULAÇÃO: MINIMIZAÇÃO

A ABORDAGEM é essencialmente a mesma que em problemas de maximização, pelo que aproveitaremos a oportunidade para apresentar um problema de formulação um pouco mais complexa.

Consideremos o caso do Senferro A e do Senferro Extra, que são os nomes comerciais de dois líquidos antiferruginosos produzidos pela ABC Química Industrial Ltda. Os dois líquidos são obtidos pela adição, em proporções diferentes, de dois líquidos denominados de HPO 33 e B 45 que são adquiridos de outros fornecedores pela ABC. As proporções, todas em volume, são as seguintes:

Senferro A : 7 partes de HPO 33 para 5 partes do B 45

Senferro Extra: 4 partes de HPO 33 para 8 partes do B45

A ABC deseja programar a sua produção para o mês seguinte . como os dois produtos Senferro A e Senferro Extra têm encontrado uma excelente aceitação no mercado servido pela ABC, esta espera que deverá vender pelo menos 7000 litros do Senferro A e 3200 litros do Senferro Extra.

Como estes produtos são colocados no mercado juntamente com outros da ABC, considera-se importante para a imagem da empresa que a demanda seja atendida tão bem quanto possível.

Por outro lado, a aquisição dos componentes BPO 33 e B45 acostuma gerar alguns problemas de caixa para a ABC, dado que os fornecedores exigem pagamento à vista, enquanto que a ABC costuma dar 10 dias para os clientes.

A alternativa para a ABC é então a de minimizar o investimento feito na compra do HPO 33 e do B45, que custam respectivamente R\$ 400,00 e R\$ 200,00 o litro.

Existe uma cláusula adicional com o fornecedor do HPO 33, segundo a qual a abc não pode adquirir menos que 200 litros desse componente a cada compra.

## SOLUÇÃO

Organização dos dados do problema

| Componente | Proporções          |          | Compra mínima | Custo unitário |
|------------|---------------------|----------|---------------|----------------|
|            | Senferro A<br>Extra | Senferro |               |                |
| HPO 33     | 7                   | 4        | 200           | R\$ 400        |
| B 45       | 5                   | 8        | Não há        | R\$ 200        |

É claro que as quantidades a adquirir dos componentes HPO 33 e B 45 são variáveis de decisão, não menos importante, de se observar que, como esses componentes entram com proporções diferentes nos dois produtos Senferro A e Senferro Extra.

Assim, teremos que trabalhar com 4 variáveis para efeito de elaboração do modelo:

$x_1$  = quantidade de HPO 33 a ser usada no Senferro A

$x_2$  = quantidade de HPO 33 a ser usada no Senferro Extra

$y_1$  = quantidade de B 45 a ser usada no Senferro A

$y_2$  = quantidade de B 45 a ser usada no Senferro Extra

fica claro que, se determinados os valores das variáveis acima, basta tomar

$(x_1 + x_2)$  como a quantidade de HPO 33 a comprar

enquanto que,

$(y_1 + y_2)$  será a quantidade de B 45.

Como cada unidade de HPO 33 contribui com R\$ 400 para o custo

Enquanto que cada unidade de B 45 contribui com R\$ 200 para o custo

Independentemente de serem usadas em um ou outro produto,

A função objetivo fica:

Minimizar  $400 x_1 + 400 x_2 + 200 y_1 + 200 y_2$

A primeira restrição a considerar é o atendimento da demanda mínima da Senferro A, que é de 7000 litros.

|                                    |                                  |   |
|------------------------------------|----------------------------------|---|
| CENTRO UNIVERSITÁRIO NOVE DE JULHO |                                  | 7 |
| DISCIPLINA: PESQUISA OPERACIONAL   | PROF.: LUIS ANTONIO CCOPA YBARRA |   |

Supondo que as condições de linearidade prevaleçam, quando se misturam os dois componentes a quantidade final de Senferro A é simplesmente a soma das quantidades isoladas dos componentes.

A primeira restrição fica:

$$x_1 + y_1 \geq 7000$$

o mesmo raciocínio vale para a restrição referente ao Senferro Extra, cuja demanda mínima é de 3200 litros :

A segunda restrição fica:

$$x_2 + y_2 \geq 3200$$

A terceira restrição diz respeito à compra mínima do componente HPO 33, que deve ser de 200 litros

$$x_1 + x_2 \geq 200$$

há ainda duas restrições, que dizem respeito às proporções que devem manter entre si os dois componentes na composição dos dois produtos.

Na mistura para a obtenção do Senferro A , a proporção entre o HPO 33 e o B 45 deve ser 7:5

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{7}{5}$$

como é de costume que todas as variáveis estejam alinhadas, e que o lado direito das restrições seja sempre um número, pode-se reescrever a restrição como

$$5 x_1 - 7 y_1 = 0$$

na obtenção do Senferro Extra, as proporções são de 4:8 para HPO 33 e B 45

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{4}{8}$$

$$8 x_2 - 4 y_2 = 0$$

sem esquecer as condições de não negatividade, finalmente:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

resumindo, o modelo completo (colocando coeficientes iguais a 1 e zero para que todas as restrições contenham todas as variáveis) temos:

$$\text{minimizar } 400 x_1 + 400 x_2 + 200 y_1 + 200 y_2$$

sujeito a:

$$1 x_1 + 0 x_2 + 1 y_1 + 0 y_2 \geq 7000$$

$$0 x_1 + 1 x_2 + 0 y_1 + 1 y_2 \geq 3200$$

$$1 x_1 + 1 x_2 + 0 y_1 + 0 y_2 \geq 200$$

$$5 x_1 + 0 x_2 - 7 y_1 + 0 y_2 \geq 0$$

$$0 x_1 + 8 x_2 + 0 y_1 - 4 y_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$$

o problema completo tem, portanto 4 variáveis e 5 restrições. Não há a necessidade de se colocar os coeficientes das variáveis nas condições de não negatividade, pois não comporão no algoritmo de solução, embora sejam condição obrigatória.

Novamente para não se deixar em aberto quaisquer dúvidas, segue a solução:

$$x_1 = 4.983,3 \text{ litros}$$

$$x_2 = 1.066,7 \text{ litros} \quad \text{total HPO 33} = x_1 + x_2 = 6.050 \text{ litros}$$

$$y_1 = 2.916,7 \text{ litros}$$

$$y_2 = 2.133 \text{ litros} \quad \text{total B 45} = y_1 + y_2 = 5.050 \text{ litros}$$

o investimento mínimo será nesse caso de R\$ 3.070.000,00.

Todas as restrições são rigorosamente obedecidas.

## SOLUÇÃO GRÁFICA: PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

Retornemos ao problema da Indústria de Móveis Fresão, que consistia em determinar quantas unidades dos conjuntos Beatrice e Anamaria deveriam ser programadas de forma a maximizar o lucro. Como se recorda, a formulação completa era a seguinte:

Maximizar  $4000x + 5000y$

Sujeito a

$$5x + 10y \leq 100$$

$$9x + 6y \leq 108$$

$$1y \leq 8$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

a solução gráfica exige que tomemos dois eixos ortogonais, cada um dos quais irá representar os valores de uma das variáveis, no caso tomaremos o eixo horizontal para a variável  $x$  e o eixo vertical para a variável  $y$ .

a seguir todas as restrições devem ser representadas no plano  $xy$ .

Vejamus a primeira restrição

A expressão  $5x + 10y$  representa o número total de horas de preparação que os dois conjuntos irão ocupar.

É obrigatório que essa não ultrapasse a 100 horas, que é o máximo disponível. Suponha por um momento que a soma  $5x + 10y$  ocupasse exatamente as 100 horas disponíveis, ou seja,  $5x + 10y = 100$

essa igualdade é apenas a equação de uma reta, que pode ser determinada no plano se soubermos as coordenadas de dois dos seus pontos.

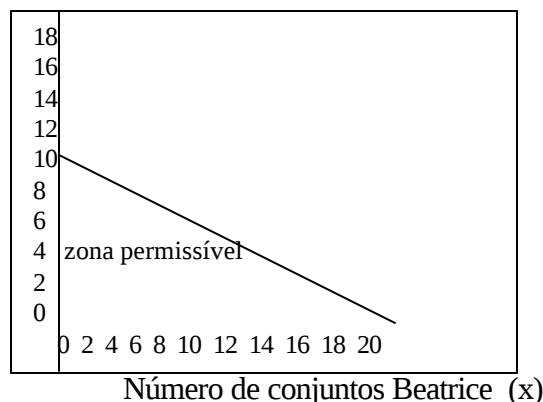
Tradicionalmente, escolhem-se os pontos  $(0,y)$  e  $(x,0)$  ou seja, os pontos onde a reta encontra os eixos  $x$  e  $y$ .

Se  $x = 0$  então  $5(0) + 10y = 100$  e  $y = 10$ .

Se  $y = 0$  então  $5x + 10(0) = 100$  e  $x = 20$ .

A reta resultante encontra-se na figura abaixo: ( restrição de horas de preparação )

número de conjuntos Anamaria ( $y$ )



Ao longo da reta, teremos todas as combinações possíveis de valores de  $x$  e de  $y$  tal que  $5x + 10y = 100$  assim, por exemplo se  $x = 6$  teremos  $5(6) + 10y = 100$  ou  $y = 7$ .

A região compreendida entre a reta e os eixos também obedece à restrição  $5x + 10y < 100$ , logo a restrição pode ser representada pela área compreendida entre a reta e os eixos, incluída a própria reta para o caso de igualdade  $5x + 10y = 100$ .

A essa área que aparece no gráfico, denominamos de zona permissível pela restrição do número de horas disponíveis de preparação.

A área é limitada pelos eixos porque valem as condições de não negatividade.

Qualquer ponto fora da zona permissível (como por exemplo o ponto onde  $x = 10$  e  $y = 14$ ) não será uma solução possível para o problema.

A restrição seguinte diz respeito ao número máximo disponível de horas para acabamento

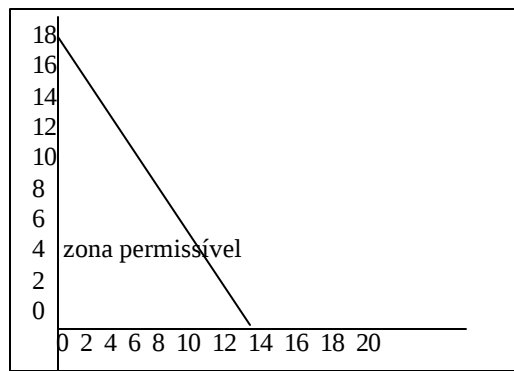
$$9x + 6y \leq 108$$

tomando novamente a igualdade, a reta resultante cortará os eixos nos pontos (0,8) e (12,0)

como é mostrado no gráfico. a região admissível novamente está compreendida entre a reta e os dois eixos, sendo a própria reta o limite, valendo pela igualdade citada.

( Restrição de horas de acabamento )

número de conjuntos Anamaria ( $y$ )



Número de conjuntos Beatrice ( $x$ )

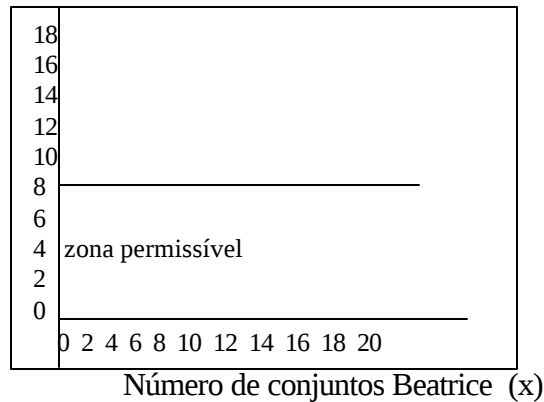
Finalmente a última restrição estabelece que o número máximo de conjuntos Anamaria que pode ser fabricado é igual a 8, ou seja:

$$1y \leq 8$$

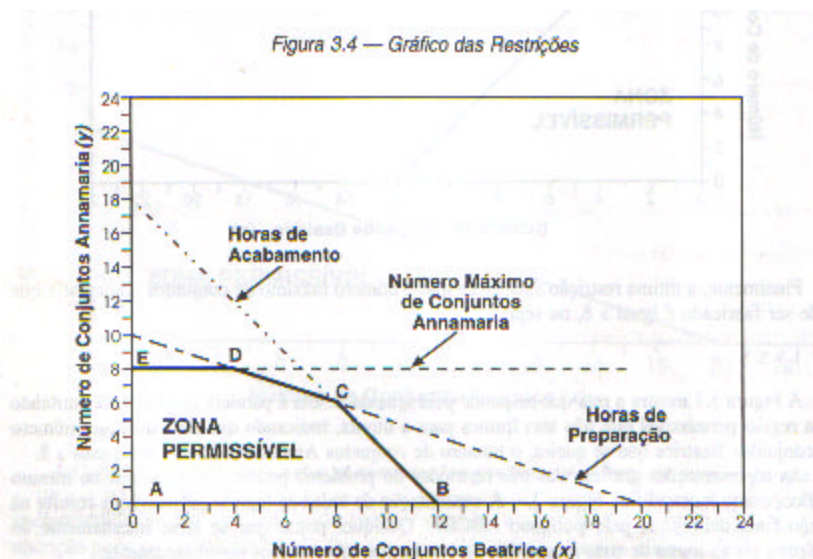
O gráfico a seguir mostrará a reta que responde pela igualdade. Ela é paralela ao eixo, delimitando uma região permissível que não tem limites para a direita, indicando que para qualquer número de conjuntos Beatrice que se queira, o número de conjuntos Anamaria jamais ultrapassa a 8.

(Restrição : conjuntos Anamaria)

número de conjuntos Anamaria (y)



Os pontos A, B, C, e D são chamados PONTOS EXTREMOS da região possível, que nesse caso é finita e delimitada pelas arestas do polígono ABCDE. Não é difícil determinar as coordenadas desses pontos extremos. Os pontos A, B, e E, por sua localização especial, têm coordenadas imediatas.



A (  $x = 0, y = 0$  ) ( origem dos eixos )

B (  $x = 12, y = 0$  )

E (  $x = 0, y = 8$  )

Os pontos C e D podem ser determinados diretamente por inspeção visual no gráfico, se ele estiver suficientemente claro, no caso em pauta, distingue-se que as coordenadas desses pontos são:

C = (  $X = 8, Y = 6$  )

D (  $X = 4, Y = 8$  )

Se o gráfico não estiver traçado em perfeita escala ou se a leitura indica números fracionários, é conveniente determinar-se as coordenadas por meio analíticos.

Vejamos como isso é feito com os pontos C e D.

Para determinar o ponto C, nota-se que ele é o ponto de intersecção das retas limite das restrições referentes às horas de preparação e de acabamento, ou seja, é a intersecção de

$$5x + 10y = 100 \text{ (I)}$$

$$9x + 6y = 108 \text{ (II)}$$

Uma combinação linear adequada entre as duas equações permitirá obter uma das variáveis, cujo valor poderá ser então, substituído em qualquer uma das equações originais para dar o valor da outra variável restante.

Multiplicando-se a equação (I) por 3, a equação (II) por 5 e subtraindo a (II) da (I) vem que

$$\begin{array}{rcl}
 15x + 30y & = & 300 \\
 45x + 30y & = & 540 \\
 \hline
 -30x + 0 & = & -240
 \end{array}
 \quad ( - )$$

de onde se conclui que  $x = 8$  que substituído na equação (I) fornece

$$5(8) + 10y = 100 \quad 10y = 100 - 40 = 60$$

$$y = 6$$

semelhantemente, o ponto D é o encontro das retas limite das restrições do número máximo de horas disponíveis de preparação e do número máximo de conjuntos Anamaria.

$$5x + 10y = 100$$

$$1 \text{ y} = 8$$

o que fornece imediatamente  $x = 4$   
 embora tenhamos no momento uma região permissível para a solução do problema e conheçamos as coordenadas dos pontos limites dessa região, ainda não temos a solução propriamente dita. Acontece que os pontos extremos da região permissível guardam uma importantíssima propriedade:

“ A solução ótima encontra-se em um dos pontos extremos ”

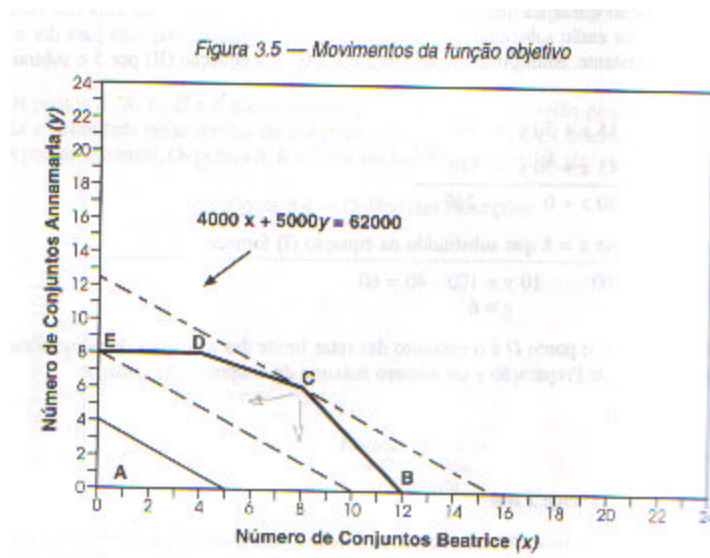
para descobrir qual é o ponto que nos fornece a solução ótima, basta substituirmos as coordenadas de todos os pontos extremos na função objetivo, como mostrado em seguida:

| PONTO | x  | y | 4000 x | 5000 y | Função objetivo<br>( 4000 x + 5000 y) |
|-------|----|---|--------|--------|---------------------------------------|
| <hr/> |    |   |        |        |                                       |
| A     | 0  | 0 | 0      | 0      | 0                                     |
| B     | 12 | 0 | 48000  | 0      | 48000                                 |
| C     | 8  | 6 | 32000  | 30000  | 62000                                 |
| D     | 4  | 8 | 16000  | 40000  | 56000                                 |
| E     | 0  | 8 | 0      | 40000  | 40000                                 |

A solução ótima encontra-se, portanto, no ponto C , fornecendo um valor de R\$ 62.000,00 para a FUNÇÃO OBJETIVO. Corresponde a fabricar 8 conjuntos Beatrice e 6 conjuntos Anamaria.

Há uma outra forma de se determinar o ponto C como SOLUÇÃO ÓTIMA.

A função objetivo  $4000x + 5000y$  define uma família de retas no plano xy. Atribuindo um valor arbitrário à função poderemos encontrar a reta correspondente, analogamente ao que fizemos com as restrições. Atribuindo a  $4000x + 5000y$ , por exemplo, o valor 20.000 ( múltiplo de 4000 e 5000, para facilitar os cálculos) define-se a reta que passa pelos pontos ( 0,4) e (5,0) , como se mostra no gráfico:



Se a reta for movida paralelamente a si mesma, para a direita, o último ponto da região permissível que ela tangenciará será o ponto C.

O gráfico também mostra um movimento intermediário, correspondente a um valor 40.000 para a função objetivo.

Observe que ao mover a reta para a direita, paralelamente a si mesma, significa atribuir valores cada vez maiores à função objetivo.

Como o ponto C é o último ponto da tangência da região possível, a ele corresponderá a solução ( $x = 8$  e  $y = 6$ ) que maximiza a função objetivo.

### SOLUÇÃO GRÁFICA: PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO

O tratamento é análogo ao caso de problemas de maximização: as restrições são delimitadas por retas, definindo-se as regiões permissíveis.

A combinação dessas regiões dará a região final, comum a todas as restrições.

A solução estará então, em um dos pontos extremos.

Como se recorda, o problema da ABC Química Industrial Ltda. Tinha 4 variáveis, de forma que não podemos toma-lo como exemplo.

Consideremos então, o modelo abaixo.

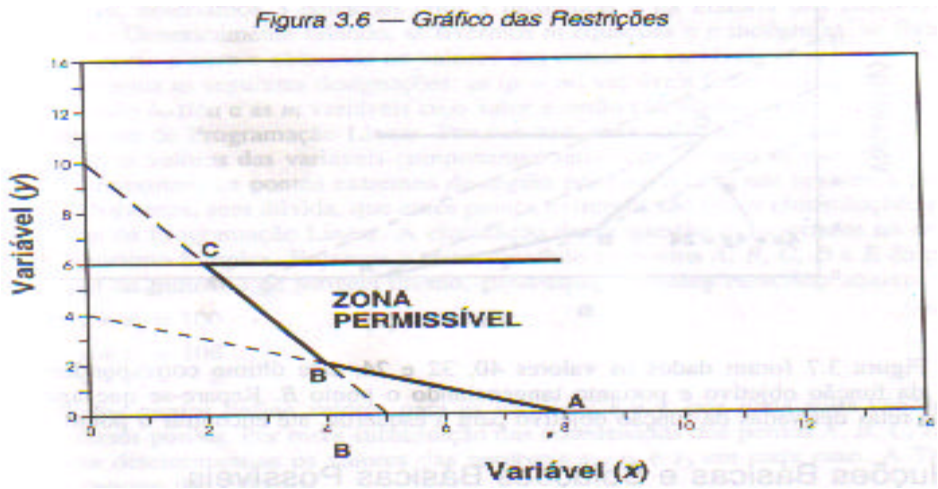
Minimizar  $4x + 4y$

Sujeito a  $2x + 1y \geq 10$

$1x + 2y \geq 8$

$1y \leq 6$

transformando as desigualdades em igualdades, delimita-se a região comum mostrada no gráfico abaixo:



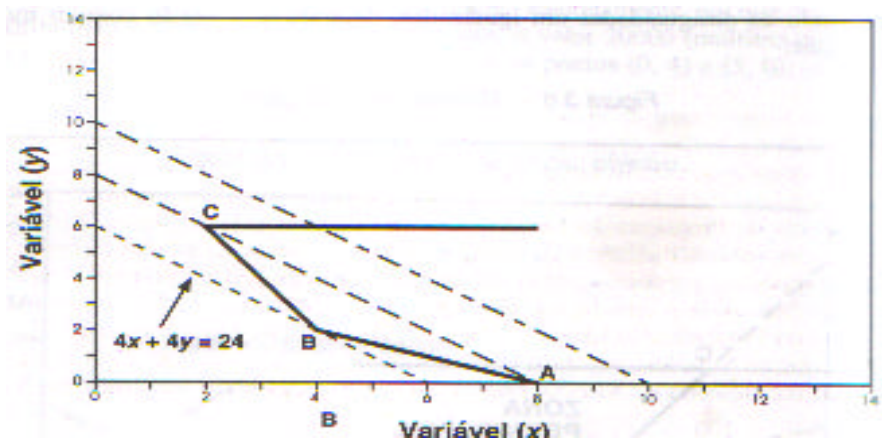
As regiões permissíveis ficam agora à direita das retas limite traçadas para as restrições  $x + 1y \geq 10$  e  $1x + 2y \geq 8$ , em quanto que a região permissível para a restrição  $1y \leq 6$  localiza-se entre a reta  $1y = 6$  e o eixo da variável  $x$ , limitando-se à esquerda pelo eixo da variável  $y$ . a região comum permissível é limitada à direita e os pontos extremos resumem-se a A, B e C, cujas coordenadas, são as seguintes:

- A (  $x = 8$   $y = 0$  )
- B (  $x = 4$   $y = 2$  )
- C (  $x = 2$   $y = 6$  )

A tabela abaixo, semelhante à que construímos de maximização, mostra que a solução ótimo encontra-se no ponto B, com a função objetivo assumindo seu valor mínimo de 24.

| PONTO | x | y | 4 x | 4 y | função objetivo<br>( 4 x + 4 y ) |
|-------|---|---|-----|-----|----------------------------------|
| A     | 8 | 0 | 32  | 0   | 32                               |
| B     | 4 | 2 | 16  | 8   | 24                               |
| C     | 2 | 6 | 8   | 24  | 32                               |

Podemos também determinar a solução ótima construindo as retas derivadas da função objetivo dando valores à expressão  $4x + 4y$ , como mostra o gráfico abaixo



no gráfico foram dados os valores 40, 32 e 24, este último corresponde ao valor mínimo da função objetivo e portanto, tangenciando o ponto B.

Repare que agora devemos mover as retas derivadas da função objetivo para a esquerda, até encontrar o ponto extremo.

## O PROBLEMA GERAL DA ALOCAÇÃO LINEAR

FONTE  
 PESQUISA OPERACIONAL  
 Russell L. ACKOFF  
 Maurice W. Sasieni

### INTRODUÇÃO

Convém lembrar que o problema de alocação envolve recursos e tarefas expressos em diferentes tipos de unidades.

Consideremos que uma fábrica produz  $n$  produtos diferentes, nas quantidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , empregando diversas combinações de  $m$  máquinas diferentes.

Cada unidade do produto  $j$  consome  $a_{ij}$  unidades de tempo da máquina  $i$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ).

A mesma operação pode requerer mais tempo numa máquina (por exemplo, uma máquina mais velha) do que noutra (mais nova).

A quantidade total de tempo disponível na máquina  $i$  é  $b_i$ , por período de programação.

Finalmente, o lucro com cada unidade do produto  $j$  que se vende é  $c_j$ . Esta situação está representada na tabela 1.

TABELA 1

NÚMERO DE UNIDADES DE TEMPO NECESSÁRIAS PARA PRODUZIR UMA UNIDADE DE CADA PRODUTO

|                |     | PRODUTO<br>$j =$ |          |     |          | NÚMERO DE HORAS<br>DISPONÍVEIS/PERÍODO<br>DE PROGRAMAÇÃO |
|----------------|-----|------------------|----------|-----|----------|----------------------------------------------------------|
|                |     | 1                | 2        | ... | $n$      |                                                          |
| MÁQUINAS $i =$ | 1   | $a_{11}$         | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ | $b_1$                                                    |
|                | 2   | $a_{21}$         | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ | $b_2$                                                    |
|                | .   | .                | .        | .   | .        | .                                                        |
|                | .   | .                | .        | .   | .        | .                                                        |
|                | .   | .                | .        | .   | .        | .                                                        |
|                | $m$ | $a_{m1}$         | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ | $b_m$                                                    |
| LUCRO/UNIDADE  |     | $c_1$            | $c_2$    | ... | $c_n$    |                                                          |

Este problema, como muitos problemas de distribuição, pode ser expresso como a maximização de uma função linear sujeita a restrições expressas em desigualdades lineares.

### EXEMPLO NUMÉRICO

Consideremos um exemplo numérico muito simples. Uma pequena fábrica produz dois tipos de peças para automóveis. A fábrica compra unidades fundidas que são torneadas, furadas e retificadas.

Os dados relativos à produção estão na tabela 2.

TABELA 2 CAPACIDADES

|                           | PEÇA A      | PEÇA B      |
|---------------------------|-------------|-------------|
| Capacidade De Torneamento | 25 por hora | 40 por hora |
| Capacidade De Furação     | 28 por hora | 35 por hora |
| Capacidade De Retificação | 35 por hora | 25 por hora |

As unidades para o tipo A custam R\$ 2 cada; para o tipo B custam R\$ 3 cada.

O preço de venda é de R\$ 5 e R\$ 6, respectivamente.

As três máquinas têm custos operacionais de R\$ 20, R\$ 14 e R\$ 17 por hora.

Supondo que qualquer combinação dos tipos A e B possa ser posta à venda, qual o plano de produção que maximiza o lucro?

A primeira etapa consistirá em calcular o lucro por peça, o que está feito na tabela 3.

TABELA 3 CUSTOS E LUCRO POR PEÇA

|                | PEÇA A            | PEÇA B            |
|----------------|-------------------|-------------------|
| TORNEAMENTO    | $20/25 = 0,80$    | $20/40 = 0,50$    |
| FURAÇÃO        | $14/28 = 0,50$    | $14/35 = 0,40$    |
| RETIFICAÇÃO    | $17,50/35 = 0,50$ | $17,50/25 = 0,70$ |
| COMPRA         | 2,00              | 3,00              |
| CUSTO TOTAL    | 3,80              | 4,60              |
| PREÇO DE VENDA | 5,00              | 6,00              |
| LUCRO          | 1,20              | 1,40              |

Dos resultados obtidos apresentados, conclui-se que se produzirmos em média  $x$  peças do tipo A e  $y$  peças do tipo B por hora, nosso lucro líquido será

$$Z = 1,20x + 1,40y.$$

Como os valores negativos de  $x$  e  $y$  não têm sentido devemos ter

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

não podemos escolher  $x$  e  $y$  à vontade uma vez que temos de respeitar os limites de capacidade, que nos conduzem aos seguintes resultados:

Torneamento  $\frac{x}{25} + \frac{y}{40} \leq 1$

Furação  $\frac{x}{28} + \frac{y}{35} \leq 1$

Retificação  $\frac{x}{35} + \frac{y}{25} \leq 1$

Eliminando os denominadores, obtemos:

Torneamento  $40x + 25y \leq 1.000$

Furação  $35x + 28y \leq 980$

Retificação  $25x + 35y \leq 875$

Quando representamos graficamente a equação  $40x + 25y = 1.000$ , obtemos uma reta que divide o plano em duas regiões (tabela 1). Na região que contém a origem,  $40x + 25y < 1.000$ ; na outra região,  $40x + 25y > 1.000$ .

As duas outras desigualdades que aparecem na tabela 3, dividem o plano de modo semelhante.

Assim, se encararmos nossa decisão sobre os valores de  $x$  e  $y$  como equivalendo a escolher um ponto no plano, vemos que o ponto deve estar no interior ou no limite da região OABC.

Como a reta  $35x + 28y = 980$  está fora desta região, a restrição relativa à capacidade de furação é redundante.

Em outras palavras, qualquer combinação de  $x$  e  $y$  que satisfaça às restrições de torneamento e retificação estará, automaticamente, dentro do limite da capacidade de furação.

A propriedade fundamental que nos permite resolver o problema garante que o ponto  $(x,y)$  para o qual os lucros atingem seu valor máximo tem que coincidir com um dos vértices de OABC.

É muito fácil, portanto, verificar que os possíveis valores maximizantes são:

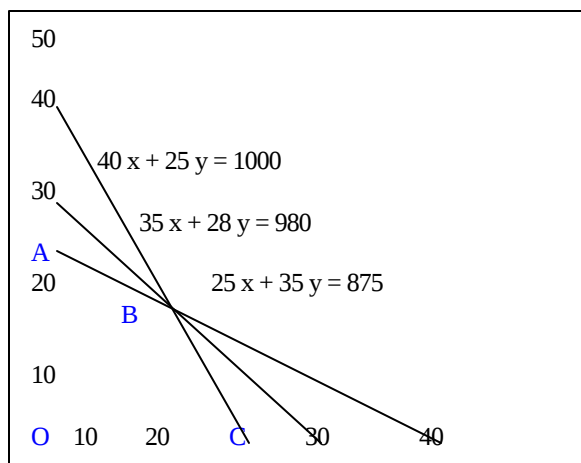
O (0,0)  
A (0,25)  
B (16,93, 12,90)  
C (25,0)

Os lucros correspondentes são:

$Z_O = 0$ ,  
 $Z_A = 35$ ,  
 $Z_B = 38,39$   
 $Z_C = 30$

De modo que o melhor plano de produção é 16,93 de A por hora e 12,90 de B por hora.

Estes valores devem ser representados com taxas médias.



Provavelmente poderíamos produzir a Peça A durante várias horas (ou mesmo dias) e depois produzir a Peça B durante várias horas.

Tudo o que é preciso maximizar os lucros é manter as quantidades produzidas na proporção de 16,93 para 12,90.

## Programação Linear

Fonte: Pesquisa Operacional  
Ermes Medeiros da Silva  
Elio Medeiros da Silva  
Valter Gonçalves  
Afrânio Carlos Murolo

### Modelo em Programação Linear

Uma das técnicas mais utilizadas na abordagem de problemas de Pesquisa Operacional é a programação linear. A simplicidade do modelo envolvido e a disponibilidade de uma técnica de solução programável em computador facilitam sua aplicação. As aplicações mais conhecidas são feitas em sistemas estruturados, como os de produção, finanças, controles de estoques, etc.

O modelo matemático de programação linear é composto de uma função objetivo; e de restrições técnicas representadas por um grupo de inequações também lineares.

Exemplo: Função objetivo a ser maximizada:  $\text{Lucro} = 2x_1 + 3x_2$

|            |                     |                                                |
|------------|---------------------|------------------------------------------------|
| RESTRIÇÕES | TÉCNICAS            | $4x_1 + 3x_2 \leq 10$<br>$6x_1 - 3x_2 \geq 20$ |
|            | DE NÃO NEGATIVIDADE | $x_1 \geq 0$<br>$x_2 \geq 0$                   |

As variáveis controladas ou variáveis de decisão são  $x_1$  e  $x_2$

A função objetivo ou função de eficiência mede o desempenho do sistema, no caso a capacidade de gerar lucro, para cada solução apresentada.

O objetivo é maximizar o lucro.

As restrições garantem que essas soluções estão de acordo com as limitações técnicas impostas pelo sistema.

As duas últimas restrições exigem a não negatividade das variáveis de decisão, o que deverá acontecer sempre que a técnica de abordagem for a de programação linear.

A construção do modelo matemático, no caso um modelo linear, é a parte mais complicada de nosso estudo. Não há regra fixa para esse trabalho, mas podemos sugerir um roteiro que ajuda a ordenar o raciocínio.

| ROTEIRO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Quais são as variáveis de decisão?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Qual o objetivo?                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Quais as restrições?                                                                                                                                                 |
| <p>Aqui o trabalho consiste em explicitar as decisões que devem ser tomadas e representar as possíveis decisões através de variáveis chamadas variáveis de decisão.</p> <p>Se o problema é de programação de produção, as variáveis de decisão são as quantidades a produzir no período, se for um problemas de programação de investimento, as variáveis vão representar as decisões de investimento, isto é, quanto investir em cada oportunidade de investimento, e em que período.</p> <p>Nas descrições sumárias de sistemas, isso fica claro quando lemos a questão proposta, ou seja, a pergunta do problema.</p> | <p>Aqui devemos identificar o objetivo da tomada de decisão. Eles aparecem geralmente na forma de maximização de lucros e receitas, minimização de custos, perdas, etc.</p> <p>A função objetivo é a expressão que calcula o valor do objetivo( lucro, perda, receita, etc.) em função das variáveis de decisão.</p> | <p>Cada restrição imposta na descrição do sistema deve ser expressa como uma relação linear ( igualdade ou desigualdade ), montadas com as variáveis de decisão.</p> |

|                                    |                                  |    |
|------------------------------------|----------------------------------|----|
| CENTRO UNIVERSITÁRIO NOVE DE JULHO |                                  | 23 |
| DISCIPLINA: PESQUISA OPERACIONAL   | PROF.: LUIS ANTONIO CCOPA YBARRA |    |

### Exemplo 1

Certa empresa fabrica dois produtos P1 e P2.

O lucro unitário do produto P1 é de 1000 unidades monetárias e o lucro unitário de P2 é de 1800 unidades monetárias.

A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P2.

O tempo anual de produção disponível para isso é de 1200 horas.

A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P1 e 30 unidades anuais para P2.

Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens?

Construa o modelo de programação linear para esse caso.

Solução:

a) quais as variáveis de decisão?

O que deve ser decidido é o plano de produção, isto é, quais as quantidades anuais que devem ser produzidas de P1 e P2.

Portanto, as variáveis de decisão serão  $x_1$  e  $x_2$

$x_1 \longrightarrow$  quantidade anual a produzir de P1

$x_2 \longrightarrow$  quantidade anual a produzir de P2

b) qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o lucro, que pode ser calculado:

Lucro devido a P1:  $1000 \cdot x_1$  (lucro por unidade de P1 x quantidade produzida de P1)

Lucro devido a P2:  $1800 \cdot x_2$  (lucro por unidade de P2 x quantidade produzida de P2)

Lucro total:  $L = 1000x_1 + 1800x_2$

c) quais as restrições?

As restrições impostas pelo sistema são:

- disponibilidade de horas para a produção: 1200 horas.
- Horas ocupadas com P1:  $20x_1$  (uso por unidade x quantidade produzida)
- Horas ocupadas com P2:  $30x_2$  (uso por unidade x quantidade produzida)
- Total em horas ocupadas na produção:  $20x_1 + 30x_2$
- Disponibilidade: 1200 horas.
- Restrição descritiva da situação:  $20x_1 + 30x_2 \leq 1200$ .
  
- Disponibilidade de mercado para os produtos (demanda)
  
- Disponibilidade para P1: 40 unidades
- Quantidade a produzir de P1:  $x_1$
- Restrição descritiva da situação:  $x_1 \leq 40$
  
- Disponibilidade para P2: 30 unidades.
- Quantidade a produzir de P2:  $x_2$
- Restrição descritiva da situação:  $x_2 \leq 30$

Resumo do modelo :  $\text{Max } L = 1000x_1 + 1800x_2$

Sujeito a:

Restrições técnicas :

$$20x_1 + 30x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_2 \leq 30$$

Restrições de não negatividade:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

|                                    |                                  |    |
|------------------------------------|----------------------------------|----|
| CENTRO UNIVERSITÁRIO NOVE DE JULHO |                                  | 25 |
| DISCIPLINA: PESQUISA OPERACIONAL   | PROF.: LUIS ANTONIO CCOPA YBARRA |    |

Exemplo 2:

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas.

A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia.

Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar.

Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas.

Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas.

Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível?

Cada unidade de carne custa 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 2,5 unidades monetárias.

Solução:

a) quais são as variáveis de decisão?

Devemos decidir quais as quantidades de carne e ovos que a pessoa deve consumir no dia.. as variáveis de decisão serão, portanto:

$x_1$  → quantidade de carne a consumir no dia

$x_2$  → quantidade de ovos a consumir no dia

b) qual o objetivo?

O objetivo é minimizar o custo, que pode ser calculado:

Custo devido à carne:  $3 \cdot x_1$  (custo por unidade x quantidade a consumir de carne)

Custo devido aos ovos:  $2,5 \cdot x_2$  (custo por unidade x quantidade s consumir de ovos)

Custo total :  $C = 3x_1 + 2,5x_2$

Objetivo: minimizar  $C = 3x_1 + 2,5x_2$

c) quais as restrições?

As restrições impostas pelo sistema são:

- necessidade mínima de vitamina : 32 unidades
- vitamina de carne:  $4 \cdot x_1$  ( quantidade por unidade x unidades de carne a consumir)
- vitamina de ovos:  $8 \cdot x_2$  (quantidade por unidade x unidade de ovos a consumir)
- total de vitaminas :  $4x_1 + 8x_2$
- necessidade mínima : 32
- restrição descritiva da situação:  $4x_1 + 8x_2 \geq 32$
  
- necessidade mínima de proteínas: 36 unidades
- proteína de carne:  $6 \cdot x_1$  (quantidade por unidade x quantidade de carne a consumir)
- proteína de ovos :  $6 \cdot x_2$  ( quantidade por unidade x quantidade de ovos a consumir)
- total de proteínas:  $6x_1 + 6x_2$
- necessidade mínima: 36
- restrição descritiva da situação:  $6x_1 + 6x_2 \geq 36$

Resumo do modelo:  $\min C = 3x_1 + 2,5x_2$

Sujeito a:

Restrições técnicas:

$$4x_1 + 8x_2 \geq 32$$

$$6x_1 + 6x_2 \geq 36$$

Restrições de não negatividade:

$$x_1 \geq 0$$

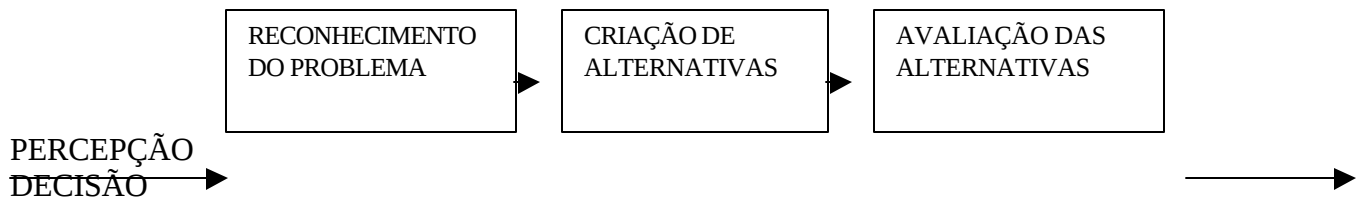
$$x_2 \geq 0$$

## FORMULAÇÃO E ANÁLISE DE MODELOS

### MODELAGEM DE PROBLEMAS GERENCIAIS

#### O MODELO NO PROCESSO DE DECISÃO

Para se chegar a uma Decisão, a pessoa toma contato com o problema (percepção), procura focaliza-lo bem como em termos de escopo, importância, valor, consequências da ação ou da inação, cria alternativas para a solução, estabelece um critério para seleção de uma alternativa, avalia as alternativas e chega a uma conclusão final.



#### CRITÉRIOS

#### FACILIDADES QUE OS MODELOS FORNECEM:

- 1) visualização da estrutura do sistema real em análise;
- 2) representação das informações e suas inter-relações;
- 3) sistemática de análise e avaliação do valor de cada alternativa;
- 4) instrumento de comunicação e discussão com outras pessoas.

#### NECESSIDADE DE UM MODELO FORMAL

A partir de um certo nível de complexidade, torna-se quase impossível estimar corretamente as implicações de uma decisão sem avaliar corretamente a informação disponível, numa forma lógica e ordenada.

Em qualquer situação que exija uma decisão, o passo fundamental para compreender a natureza do problema é a identificação de todos os fatores envolvidos, que fornecem elementos para a análise e conclusão.

No processo de construção de um modelo, esses fatores são chamados VARIÁVEIS do problema, tendo em vista que usualmente podem assumir valores diversos durante o desenvolvimento da solução.

As variáveis de um modelo de um problema de decisão podem ser classificadas em três categorias:

- variáveis de decisão
- variáveis controláveis ou endógenas
- variáveis não controláveis ou exógenas

### VARIÁVEIS DE DECISÃO

São aquelas que foram definidas pelo analista como fornecedoras das informações que servirão de base para o gerente chegar à decisão. Assim, por exemplo, se o problema em questão for “aplicar dinheiro em um projeto de expansão de uma fábrica para obter o máximo retorno”, uma variável de decisão poderá ser a “taxa de retorno” de cada alternativa do projeto e de localização.

### VARIÁVEL CONTROLÁVEL OU ENDÓGENA

É uma variável gerada pelo próprio modelo, durante o processo de solução, sendo dependente dos dados fornecidos, das hipóteses estabelecidas e da própria estrutura do modelo. A variável de decisão é, sem dúvida, uma variável controlável especial por indicar decisão.

No exemplo acima, uma variável controlável, fornecida pelo modelo de cálculo da taxa de uma alternativa, é o “valor final” do investimento após o período considerado.

VARIÁVEIS NÃO CONTROLÁVEIS OU EXÓGENAS são fatores ou dados externos fornecidos ao modelo e que representam as hipóteses assumidas ou as condições que devem ser respeitadas. No exemplo do investimento em um projeto de expansão, uma variável não controlável é a projeção de consumo do produto da fábrica.

### TIPOS DE MODELOS

Dependendo da forma como o processo de decisão é abordado pelo analista e da própria natureza da decisão, podemos identificar diversos tipos de modelo, tais como:

|                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| modelos conceituais relacionam de forma seqüencial e lógica as informações e as fases do processo de decisão, de forma a permitir o desenvolvimento controlado e consistente com os objetivos em mente. | modelos simbólicos ou matemáticos são baseados na pressuposição de que todas as informações e variáveis relevantes do problema de decisão podem ser quantificadas. Isso leva a utilizar símbolos matemáticos para representá-las e a usar funções matemáticas para descrever as ligações entre elas e a | modelos heurísticos são construídos quando a complexidade do problema é de tal ordem que a utilização de relações matemáticas torna-se impraticável ou extremamente dispendiosa. O esforço de construir o modelo não seria compensado pelos benefícios conseguidos no |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |                      |                                                                                                                                                                                    |
|--|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | operação do sistema. | processo de decisão. Esses modelos são baseados em regras empíricas ou intuitivas que, dada determinada solução do problema, permitem o avanço para outra solução mais aprimorada. |
|--|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## MODELOS MATEMÁTICOS

Estão divididos em dois grandes tipos:

|                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MODELOS DE SIMULAÇÃO procuram oferecer uma representação real com o objetivo de permitir a geração e análise de alternativas, dando ao analista um considerável grau de flexibilidade com relação à escolha da ação mais conveniente. | MODELOS DE OTIMIZAÇÃO não permite flexibilidade na escolha da alternativa, tendo em vista que é estruturado para selecionar uma única alternativa, que será considerada “ótima”, segundo o critério do analista. Seu critério faz parte da estrutura do modelo que encontra a melhor alternativa através de uma análise matemática. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## CONSTRUÇÃO DOS MODELOS DE SIMULAÇÃO

### PROCEDIMENTOS PARA O DESENVOLVIMENTO

Os passos básicos são:

- B) definição do problema : isso é feito da seguinte forma: especificar as informações de que o executivo precisa; acentuar o procedimento do sistema que interessa mais de perto ao analista; identificar os tipos de questões que devem ser respondidas.
- C) Identificação das variáveis relevantes; são variáveis que representarão aspectos de interesse do sistema que foram identificadas no primeiro passo, e também, outras geradas dentro do modelo, para chegar à solução final.
- D) Formalização das equações do modelo : uma vez definido o conjunto de variáveis significativas, as relações entre elas devem ser formalmente escritas em termos matemáticos. Essas relações podem ser: **definidas pela lógica do problema**:  $RECEITA = VENDA \times PREÇO \text{ UNITÁRIO}$ ; **ou empíricas**, obtidas por técnicas de estimação:  $LUCRO \text{ BRUTO} = K.VOLUME \text{ DE VENDAS}$ , onde o fator K é estimado a partir de dados históricos. **Equações derivadas de outras variáveis** através de relações algébricas.

- E) Codificação do modelo: geralmente os modelos são grandes e complexos e podendo ser programados para solução por computadores. Como essa programação influencia o desempenho do modelo, esta fase deve ser realizada por especialistas no assunto, com o objetivo de se obter a melhor programação possível. As planilhas eletrônicas têm sido utilizadas atualmente, além de outros programas especialista.
- F) Teste do modelo: esta é uma fase trabalhosa do processo e que deve ser realizada cuidadosamente. São realizados com o objetivo de ajustar o modelo ao que se espera dele e validá-lo de forma a promover sua aceitação. As vezes são aplicados dados passados para verificar se os resultados obtidos correspondem aos conseguidos na realidade.
- G) Aplicação do modelo: uma vez que tenha sido validado, pode ser utilizado para produzir respostas para as questões identificadas no passo 1.

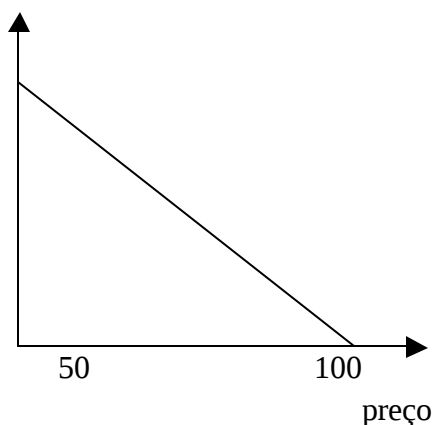
## EXEMPLO DE MODELO DE SIMULAÇÃO

### A) DEFINIÇÃO DO PROBLEMA:

Vamos imaginar uma empresa que vende um só produto e que deseja simular o lucro que poderia obter a partir de várias hipóteses de preço.

Nesse caso, como queremos relacionar o preço com o lucro obtido, temos que examinar a relação entre preço e receita, considerando que o produto apresenta determinada elasticidade, ou seja, o preço e a demanda variam, em relação inversa. Por consequência, a receita também varia em função do preço, porém numa relação não diretamente proporcional.

Quantidade vendida



### B) DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS

As seguintes variáveis podem ser definidas para construção do modelo:

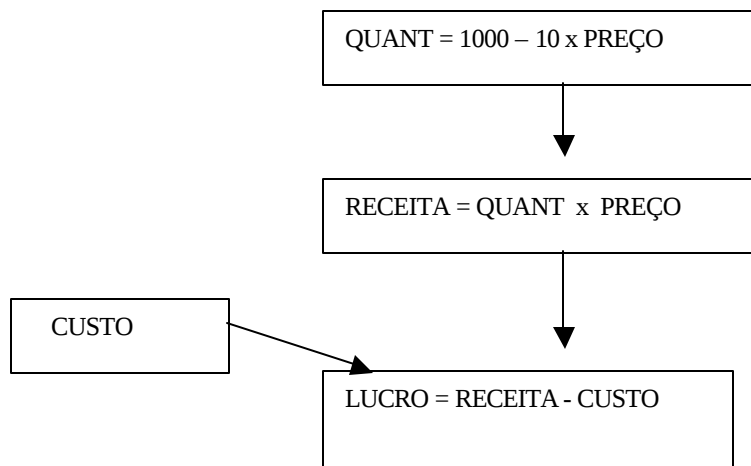
- 1) PREÇO: é o preço de venda de 1 queijo
- 2) QUANT: é a quantidade de queijo vendida em 1 mês.
- 3) RECEITA: é a receita total obtida com a venda do produto.
- 4) LUCRO: lucro líquido obtido no mês.

### C) MODELO

Com base na relação : “preço x demanda” e na função de demanda, podemos montar o modelo que simula o valor de LUCRO em função do PREÇO pelo empresário. Na forma matemática, a função de demanda pode ser escrita como:  $QUANT = 1000 - 10 \times PREÇO$  esta é a primeira equação de nosso modelo.

### D) Aplicação do modelo no processo de decisão

Com esse modelo, ao variarmos o preço do produto, podemos verificar as variações no lucro da empresa. À medida que vamos variando o PREÇO do produto, vamos obtendo vários valores para a variável de decisão LUCRO, de forma a obtermos uma função .



LUCRO

$P_1$   $P_2$  PREÇO

A VARIAÇÃO DO LUCRO EM FUNÇÃO DO PREÇO,  
O EXECUTIVO ESCOLHERÁ O PREÇO NO INTERVALO ENTE  $P_1$  E  $P_2$  .

## OTIMIZAÇÃO E MOVIMENTAÇÃO PARA A POSIÇÃO ÓTIMA CONSTRUÇÃO DOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

### PROCEDIMENTO PARA O DESENVOLVIMENTO

Como os modelos de otimização têm características diferentes com relação aos modelos de simulação, os passos que devem ser seguidos para o desenvolvimento são diferentes.

- B) DEFINIÇÃO DO PROBLEMA
- C) IDENTIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS RELEVANTES
- D) FORMULAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO: a função objetivo reflete o critério de otimização das variáveis de decisão e deve ser escrita na forma matemática.
- E) FORMULAÇÃO DAS RESTRIÇÕES: em grande número de modelos de otimização, as variáveis são sujeitas a algumas restrições, que devem ser escritas em forma matemática. Da mesma forma, o relacionamento entre as variáveis deve ser formulado matematicamente.
- F) ESCOLHA DO MÉTODO MATEMÁTICO DE SOLUÇÃO: a escolha do método é feita tendo em vista o tipo de modelo matemático criado e as análises e questões para as quais o modelo deve fornecer subsídios.
- G) APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SOLUÇÃO: o método de solução é simplesmente um exercício matemático que pode ser realizado manualmente ou por computador.
- H) AVALIAÇÃO DA SOLUÇÃO: uma vez obtida a solução, ela deve ser avaliada, e se necessário proceder correções, para incorporar novas restrições, novas variáveis ou novos critérios. Assim, uma estimativa do risco da decisão, deve ser conseguida através de uma análise de sensibilidade pós-otimização.

### EXEMPLO:

#### A) DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Vamos supor que a empresa do exemplo anterior queira estudar sua política de estocagem de forma a otimizar sua operação, reduzindo os custos incorridos.

Após um levantamento muito cuidadoso, o gerente teve condições de estimar que o custo anual de manter um item do produto em estoque era de \$50. Esse custo foi obtido considerando o custo do capital empatado, o custo das instalações, refrigeração, limpeza e seguros durante o ano e dividindo-se pelo número estimado de itens que comporão o estoque, no mesmo período. Vamos considerar aqui que esse número seja constante e igual 1000 por ano.

Por outro lado, vamos considerar que o suprimento do produto seja feito em quantidades constantes a intervalos regulares.

A colocação de cada encomenda tem custo fixo de \$1000, incluindo documentação, despesas e intervalos regulares.

O objetivo do estudo é descobrir a quantidade de mercadoria que deve ser encomendada de cada vez, de forma a minimizar o custo total da operação de estoque.  
Como única restrição do problema, vamos considerar que o fornecedor pode entregar, no máximo, 180 unidades do produto por vez.

## B) IDENTIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS

Vamos definir as seguintes variáveis para o modelo do problema:

A = quantidade anual do produto que a empresa comercializa  
S = custo de manutenção do estoque, por unidade, por ano  
P = custo fixo de colocação da encomenda, por pedido  
Q = quantidade ordenada ao atacadista para suprimento

## C) EQUAÇÕES DO PROBLEMA

Neste problema, a montagem do modelo se resume a escrever matematicamente a função objetivo, que pode ser assim formulada:

|                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>MINIMIZAR</b></p> $\text{CUSTO TOTAL (CT)} = \text{CUSTO DE MANUTENÇÃO DO ESTOQUE} + \text{CUSTO DE COLOCAÇÃO DA ENCOMENDA}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Onde:

- CUSTO DE MANUTENÇÃO DO ESTOQUE = (NÍVEL MÉDIO) x (CUSTO UNITÁRIO DE MANUTENÇÃO)
- CUSTO DE COLOCAÇÃO DA ENCOMENDA = (Nº DE ORDENS) x (CUSTO DE COLOCAÇÃO DA ORDEM)

Assim, o modelo do problema é:

**Minimizar**  $CT = \frac{Q}{2} \times S + \frac{A}{Q} \times P$

**restrição :**  $Q = 180$

Neste caso, a maneira simples de resolver o problema é derivando a função objetivo (CT) com relação à variável de decisão Q e igualando o resultado a zero.

$$\frac{d(CT)}{dQ} = S - \frac{A \cdot P}{Q^2} = 0$$

**Resolvendo:**

$$Q^* = \frac{2 \cdot A \cdot P}{S}$$

Com  $Q^*$  = quantidade a encomendar para mínimo custo anual total.

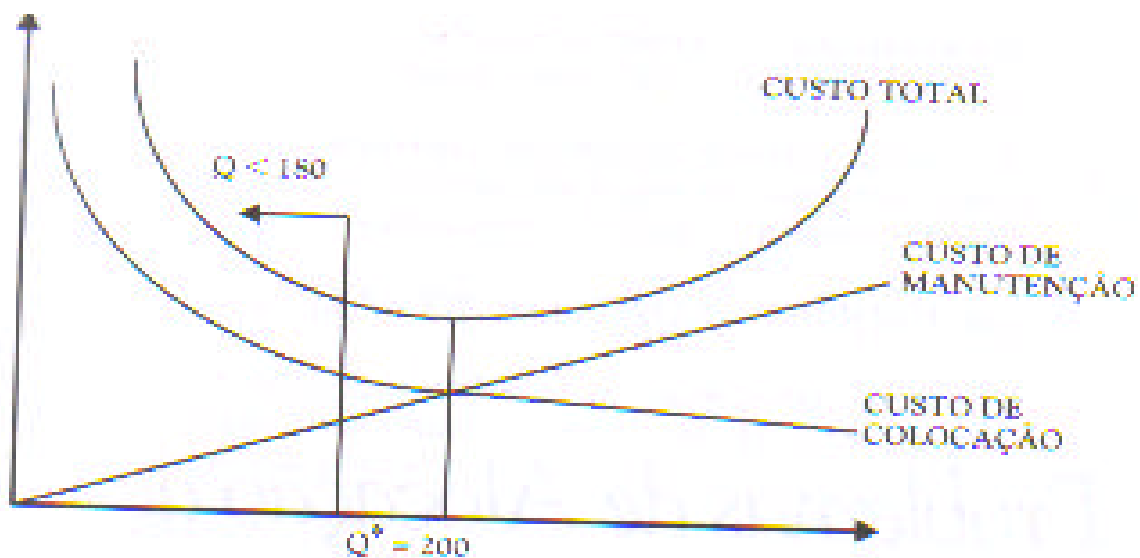
Usando os dados do problema, obtemos:

$$Q^* = \frac{2 \times 1000 \times 1000}{50} = 200$$

Assim, a encomenda que minimizaria o custo total da operação do estoque seria  $Q^* = 200$  unidades por vez.

Entretanto, como existe a restrição de que o fornecedor pode entregar no máximo 180 unidades, a encomenda mais econômica se torna obviamente  $Q = 180$  itens do produto por vez.

Uma informação que o administrador da loja pode extrair imediatamente é a economia que ele faria, em termos de custo de estocagem, se o fornecedor relaxasse a restrição de 180 unidades por encomenda.



|                                    |                                  |    |
|------------------------------------|----------------------------------|----|
| CENTRO UNIVERSITÁRIO NOVE DE JULHO |                                  | 35 |
| DISCIPLINA: PESQUISA OPERACIONAL   | PROF.: LUIS ANTONIO CCOPA YBARRA |    |