Pesquisa Operacional

Engenharia de Produção
DEPROT / UFRGS
Prof. Flavio Fogliatto, *Ph.D.*

1. INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional (PO) trata da modelagem matemática de fenômenos estáticos ou dinâmicos. Os problemas estáticos são denominados por *determinísticos*. Nestes problemas, todos os componentes são conhecidos *a priori* e nenhuma aleatoriedade em sua ocorrência é admitida. Os problemas dinâmicos são denominados *estocásticos*, e seus elementos apresentam uma probabilidade de ocorrência em uma determinada forma. Este material aborda problemas determinísticos de Pesquisa Operacional.

Os problemas de PO existem desde longa data. Somente a partir da 2ª Grande Guerra, todavia, passaram a ser tratados a partir de uma abordagem organizada, sendo organizados na forma de uma disciplina ou área do conhecimento (Ravindran *et al.*, 1987). Os primeiros casos reportados de aplicação da PO foram, em virtude de sua origem, de caráter militar. Somente após o final da Segunda Grande Guerra, problemas civis passaram a ser estudados pela PO. Os primórdios da PO encontram-se descritos no trabalho de Trefethen (1954).

Ravindran, A., Phillips, D.T. & Solberg, J.J. (1987). *Operations Research, Principles and Practice*, 2nd Ed.. New York: John Wiley.

Trefethen, F.N. (1954). “A History of Operations Research”, in *Operations Research for Management*, J.F. McCloskey & F.N. Trefethen (Eds.). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Ementa

INTRODUÇÃO

1. Programação Matemática
2. Revisão de Álgebra Linear
3. Uso de pacotes computacionais na solução de problemas

PROGRAMAÇÃO LINEAR

1. Introdução à Programação Linear
2. O algoritmo Simplex

Dois eventos motivaram o rápido desenvolvimento da PO. O primeiro foi o desenvolvimento de um algoritmo simples para solucionar problemas de programação linear (isto é, problemas determinísticos de PO), denominado *algoritmo simplex* e proposto por George Dantzig em 1947. Tal algoritmo permitiu a resolução manual de diversos problemas de PO, especialmente aqueles de baixa complexidade. O segundo foi a proliferação dos microcomputadores e o rápido aumento em sua velocidade de processamento.

Problemas de PO são usualmente modelados na forma de uma função objetivo (por exemplo, maximizar o lucro da empresa) e diversas restrições (associadas, por exemplo, à disponibilidade de matérias-primas, mão-de-obra, etc.). A chave do algoritmo *simplex* está no formato da região limitada pelas restrições, comum a todos os problemas de PO, conforme verificado por Dantzig; tal região é denominada *simplex*. Quaisquer dois pontos selecionados no contorno de um *simplex*, quando unidos por uma linha, resultam em uma linha interiamente contida dentro do *simplex*. A partir dessa constatação, a busca pela solução ótima em problemas de PO passou a ser limitada a pontos extremos da região *simplex*, o que permitiu o desenvolvimento de um algoritmo de baixa complexidade computacional por Dantzig.

Ementa

MODELOS DE REDES

1. O problema do transporte
2. O problema da designação
3. O problema do transbordo
4. Modelos de Redes

TÓPICOS AVANÇADOS

1. Programação Inteira
2. Programação Não-Linear

Os problemas determinísticos de PO podem ser classificados em duas categorias genéricas: problemas de programação (*i)* linear e (*ii*) não-linear. Somente os problemas de programação linear podem ser resolvidos pelo algoritmo *simplex*.

Um problema qualquer de programação linear é um problema de otimização (isto é, busca pela melhor dentre várias situações, utilizando um critério pré-estabelecido de otimalidade), com as seguintes características (Bronson & Naadimuthu, 1997):

- o problema possui um conjunto de variáveis manipuláveis no procedimento de busca pelo ótimo; essas são as variáveis de decisão do problema.
- uma função objetivo compõe o critério de otimalidade, sendo escrita em termos das variáveis de decisão do problema. A função objetivo é uma função linear das variáveis de decisão, devendo ser maximizada ou minimizada.
- os valores assumidos pelas variáveis de decisão devem satisfazer um conjunto de restrições, que compõem a região de soluções viáveis do problema.
- as variáveis de decisão podem assumir valores pré-estabelcidos no domínio dos números reais (isto é, valores positivos, negativos ou ambos).

Referências Bibliográficas

LIVRO-TEXTO: *Operations Research, Applications and Algorithms*, de Wayne L. Winston, 3ª. Ed., Duxburry Press.

Adicionais (no mesmo nível):

1. *Pesquisa Operacional*, de Harvey Wagner, 2ª. Ed., Prentice-Hall do Brasil.
2. *Pesquisa Operacional*, de Pierre J. Ehrlich, Ed. Atlas.

A solução de problemas através da Pesquisa Operacional pode ser implementada através de um procedimento em sete etapas, conforme apresentado na Figura 1.1. As etapas são auto-explicativas para uma descrição completa das etapas, ver Winston, 1994.

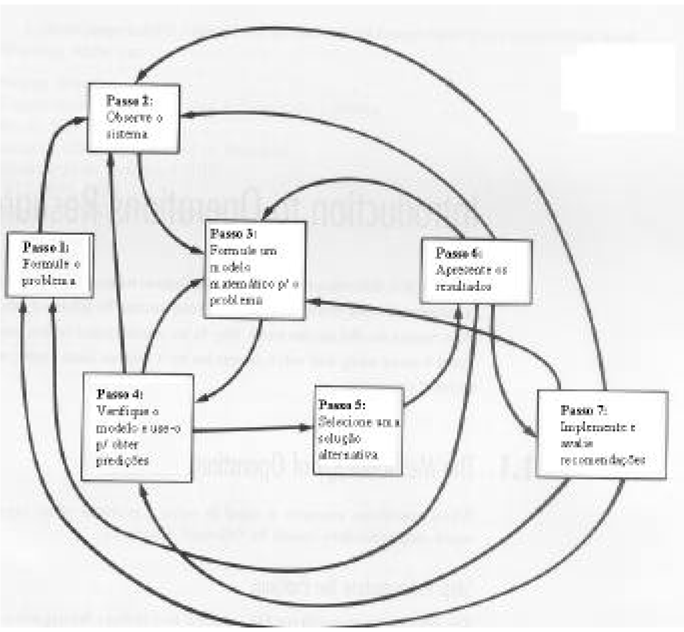


Figura 1.1.
A metodologia de Pesquisa Operacional (Winston, 1994).

Bronson, R. & Naadimuthu, G. (1997). *Operations Research*, 2nd Ed.. New York: McGraw-Hill.

Winston, W.L. (1994). *Operations Research, Applications and Algorithm*, 3rd Ed.. Belmont (CA): Duxburry Press.

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

- Programação Linear é uma ferramenta para solução de problemas de otimização.
- Em 1947, George Dantzig desenvolveu o algoritmo SIMPLEX, extremamente eficiente na solução de problemas de PL.
- A partir de então, PL passou a ser utilizada em diversos segmentos da atividade produtiva:

Bancos
Instituições Financeiras
Empresas de Transportes, etc.

- Vamos introduzir a PL a partir de um exemplo.

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR

Problemas de programação são modelados tal que o melhor uso de recursos escassos possa ser determinado, conhecidos os objetivos e necessidades do analista. Problemas de programação linear compõem uma sub-classe de problemas nos quais a modelagem é interiamente expressa em termos de equações lineares. Parece intuitivo que para ser possível a solução de um dado problema através da programação linear, o problema deve ser, incialmente, formulado em termos matemáticos.

A construção de um modelo de programação linear seguetrês passos básicos (Ravindran *et al.*, 1987):

Passo I. Identifique as variáveis desconhecidas a serem determinadas (elas são denominadas variáveis de decisão) e represente-as através de símbolos algébricos (por exemplo, x e y ou x_1 e x_2).

Passo II. Liste todas as restrições do problema e expresse-as como equações (=) ou inequações (≤, ≥) lineares em termos das variáveis de decisão definidas no passo anterior.

Passo III. Identifique o objetivo ou critério de otimização do problema, representando-o como uma função linear das variáveis de decisão. O objetivo pode ser do tipo *maximizar* ou *minimizar*.

EXEMPLO: O caso Politoy

A Politoy S/A fabrica soldados e trens de madeira.

Cada soldado é vendido por $27 e utiliza $10 de matéria-prima e $14 de mão-de-obra. Duas horas de acabamento e 1 hora de carpintaria são demandadas para produção de um soldado.

Cada trem é vendido por $21 e utiliza $9 de matéria-prima e $10 de mão-de-obra. Uma hora de acabamento e 1 h de carpintaria são demandadas para produção de um trem.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 6

Na sequência, os passos acima são ilustrados através de dois exemplos. Os exemplos foram adaptados de Ravindran *et al.* (1987).

Exemplo 1 - O problema do mix de produção

A empresa Dalai-Lama deseja planejar a produção de incensos. Os incensos requerem dois tipos de recursos: mão-de-obra e materiais. A empresa fabrica três tipos de incenso, cada qual com diferentes necessidades de mão-de-obra e materiais, conforme tabela abaixo:

		Modelo	
	A	**B**	**C**
Mão-de-obra (horas por unidade)	7	3	6
Materiais (g / unidade produzida)	4	4	5
Lucro ($ / unidade)	4	2	3

A disponibilidade de materiais é de 200 g/dia. A mão-de-obra disponível por dia é de 150 horas. Formule um problema de programação linear para determinar quanto deve ser produzido de cada tipo de incenso, tal que o lucro total seja maximizado.

Para resolver o problema acima, aplicam-se os passos para a construção de um modelo de programação linear.

<u>Passo I</u> - Identifique as variáveis de decisão. As atividades a serem determinadas dizem respeito às quantidades de produção dos três tipos de incenso. Representando essas quantidades em termos algébricos, tem-se:

EXEMPLO: O caso Politoy

A Politoy não tem problemas no fornecimento de matéria-primas, mas só pode contar com 100 h de acabamento e 80 h de carpintaria.

A demanda semanal de trens é ilimitada, mas no máximo 40 soldados são comprados a cada semana.

A Politoy deseja maximizar seus ganhos semanais.

Formule um modelo matemático a ser utilizado nessa otimização.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 7

x_A = produção diária do incenso tipo A

x_B = produção diária do incenso tipo B

x_C = produção diária do incenso tipo C

<u>Passo II</u> - Identifique as restrições. Neste problema, as restrições dizem respeito à disponibilidade limitada dos recursos de mão-de-obra e materiais. O tipo A requer 7 horas de mão-de-obra por unidade, e sua quantidade produzida é x_A. Assim, a demanda por mão-de-obra para o incenso tipo A será $7x_A$ horas (se considerarmos uma relação linear). Analogamente, os tipos B e C vão requerer $3x_B$ e $6x_C$ horas, respectivamente. Assim, a quantidade total de horas de trabalho demandadas na produção dos três tipos de incenso será $7x_A + 3x_B + 6x_C$. Sabe-se que esta quantidade não deve axceder o total de horas disponíveis na empresa, isto é, 150 horas. Assim, a restrição relacionada a mão-de-obra será:

$$7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$$

Para obter a restrição relacionada aos materiais, utiliza-se raciocínio similar. A restrição resultante será:

$$4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200$$

Para finalizar, deseja-se restringir as variáveis de decisão no domínio dos reais não-negativos (isto é, $x \geq 0$). Essas restrições, uma para cada variável de decisão, são denominadas restrições de não-negatividade. Apesar de serem comuns em muitas aplicações de programação linear, não são necessárias para a utilização da metodologia.

Ao desenvolver um modelo para a Politoy, investigaremos características comuns a todos os problemas de PL

- *VARIÁVEIS DE DECISÃO*

O primeiro passo na formulação de um problema de PL é a definição das variáveis de decisão relevantes.

Estas variáveis devem descrever completamente as decisões a serem tomadas.

A Politoy deve decidir sobre:

x_1 = núm. de soldados produzidos a cada semana
x_2 = núm. de trens produzidos a cada semana

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 8

Passo III - Identifique o objetivo. O objetivo é maximizar o lucro total oriundo das vendas dos produtos. Supondo que tudo o que for produzido encontre mercado consumidor, o lucro total resultante das vendas será:

$$z = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

Assim, o problema de mix de produção apresentado acima pode ser escrito como um modelo de programação matemática através das seguintes expressões:

Determine os valores de x_A, x_B e x_C que maximizem:

$$z = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

sujeito às restrições:

$$7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$$
$$4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200$$
$$x_A \geq 0$$
$$x_B \geq 0$$
$$x_C \geq 0.$$

- ***FUNÇÃO OBJETIVO***

Em qualquer problema de PL, o analista sempre vai desejar maximizar (ex., lucro) ou minimizar (ex., custo) alguma função das variáveis de decisão.

A função a ser maximizada (ou minimizada) é a **função objetivo**.

A Politoy deseja maximizar seus ganhos semanais. Ou seja:

ganho semanal = ganho semanal oriundo da venda de soldados + ganho semanal oriundo da venda de trens.
= (\$/soldado).(soldados/sem) + (\$/trem).(trem/sem)
= $27x_1 + 21x_2$

Também devemos considerar:

custo semanal com matéria-prima: $10x_1 + 9x_2$

custo semanal com mão-de-obra: $14x_1 + 10x_2$

Exemplo 2 - O problema do treinamento

Uma empresa de componentes automotivos conduz um programa de treinamentos para seus operadores. Operadores treinados são utilizados como instrutores no programa, na proporção de um para cada dez *trainees*. O programa de treinamento é conduzido durante um mês. Sabe-se que de cada dez *trainees* contratados, somente sete completam o programa (aqueles que não completam o programa de treinamento são dispensados).

Os operadores treinados também devem cumprir suas funções usuais de operador. O número de operadores treinados necessários para atender à produção nos próximos três meses vem apresentado abaixo:
Janeiro: 100
Fevereiro: 150
Março: 200

Além disso, a empresa necessita de 250 operadores treinados para Abril. Existem 130 operadores treinados no início do ano. As despesas mensais com salários são as seguintes:
Cada *trainee*: \$400
Cada operador treinado (trabalhando nas máquinas ou realizando treinamento): \$700
Cada operador treinado ocioso (por força de acordo sindical, maquinistas ociosos recebem uma fração do seu salário normal, não podendo, entretanto, ser demitidos): \$500

• *FUNÇÃO OBJETIVO*

O que a Politoy deseja maximizar é:

$(27x_1 + 21x_2) - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2) = 3x_1 + 2x_2$

Usaremos a variável z para designar o valor assumido pela função objetivo.

Assim:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

Os números 3 e 2 são chamados *coeficientes da função objetivo.* Eles indicam a contribuição de cada variável nos ganhos da empresa.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 10

Deseja-se modelar o problema acima. O objetivo é minimizar os custos com pessoal, atendendo à demanda de pessoal da empresa.

Formulação:

Observe, inicialmente, que operadores treinados podem executar, em umdeterminado mês, um das seguinte atividades: (1) trabalhar nas máquinas, (2) realizar treinamento, ou (3) permanecer ocioso.

Já que o número de operadores trabalhando nas máquinas em cada mês é fixo, as únicas variáveis de decisão desconhecidas são o número de operadores realizando treinamento e o número de operadores ociosos em cada mês. Assim, as variáveis de decisão do problema são:

x_1 = operadores treinados realizando treinamento em Janeiro
x_2 = operadores treinados ociosos em Janeiro
x_3 = operadores treinados realizando treinamento em Fevereiro
x_4 = operadores treinados ociosos em Fevereiro
x_5 = operadores treinados realizando treinamento em Março
x_6 = operadores treinados ociosos em Março

Segundo as restrições de demanda, um número suficiente de operadores treinados deve estar disponível em cada mês para trabalhar nas máquinas. Para garantir esses operadores, deve-se escrever a seguinte equação para cada mês:

Número nas máquinas + Número treinando + Número ocioso =
Total de operadores disponíveis no início do mês

- ***RESTRIÇÕES***

A medida que x_1 e x_2 crescem, o valor da função objetivo aumenta.

Mas x_1 e x_2 não podem crescer indefinidamente. Três restrições limitam seu crescimento:

- ***Restrição 1*** - 100 h de acabamento / semana.
- ***Restrição 2*** - 80 h de carpintaria / semana
- ***Restrição 3*** - não mais que 40 soldados / semana, devido a limitações na própria demanda.

Restrições 1 ➔ 3 devem ser expressas em termos das variáveis de decisão x_1 e x_2.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 11

A restrição para o mês de Janeiro, por exemplo, será:

$$100 + x_1 + x_2 = 130$$

Em Fevereiro, o número total de operadores treinados disponível será dado pela soma dos operadores treinados disponíveis em Janeiro e aqueles que completaram seu treinamento em Janeiro. Em Janeiro, $10x_1$ *trainees* estão em treinamento, mas somente $7x_1$ deles completam o programa, passando a ser considerados operadores treinados. Assim, a restrição para Fevereiro é:

$$150 + x_3 + x_4 = 130 + 7x_1$$

Analogamente, para o mês de Março:

$$200 + x_5 + x_6 = 130 + 7x_1 + 7x_3$$

Como a empresa necessita de 250 operadores treinados para Abril, mais uma restrição é necessária:

$$130 + 7x_1 + 7x_3 + 7x_5 = 250$$

Todas as variáveis de decisão são não-negativas.

Na composição da função objetivo, os únicos custos relevantes a serem considerados dizem respeito ao programa de treinamento (custo dos *trainees* e dos operadores realizando o treinamento) e o custo dos operadores ociosos. A função objetivo é:

$$\text{Min } z = 400(10x_1 + 10x_3 + 10x_5) + 700(x_1 + x_3 + x_5) + 500(x_2 + x_4 + x_6)$$

• ***RESTRIÇÕES***

Restrição 1:

(total hs acabamento/sem.) = (hs.acab./sold.).(sold. produzidos/sem.)
+ (hs.acab./trem).(trens produzidos/sem.)

(total hs acabamento/sem.) = $2(x_1) + 1(x_2) = 2x_1 + x_2$

A restrição 1 será dada por:

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

Observe que todos os termos de uma restrição devem ter a mesma unidade de medida.

Os valores 2 e 1 na restrição são denominados *coeficientes tecnológicos*.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 12

Reunindo função objetivo e restrições (as quais são reorganizadas tal que variáveis de decisão são posicionadas à esquerda da igualdade), chega-se ao seguinte modelo de programação linear:

$$\text{Min } z = 400(10x_1 + 10x_3 + 10x_5) + 700(x_1 + x_3 + x_5) + 500(x_2 + x_4 + x_6)$$

sujeito a:

$$x_1 + x_2 = 30$$
$$7x_1 - x_3 - x_4 = 20$$
$$7x_1 + 7x_3 - x_5 - x_6 = 70$$
$$7x_1 + 7x_3 + 7x_5 = 120$$

Todas as variáveis são não-negativas.

Restrição 2 (determinada de maneira similar):

(total hs carpintaria/sem.) = (hs.carp./sold.).(sold. produzidos/sem.)
+ (hs.carp./trem).(trens produzidos/sem.)

(total hs carpintaria/sem.) = $1(x_1) + 1(x_2) = x_1 + x_2$

A restrição 2 será dada por: $x_1 + x_2 \leq 80$

Restrição 3:

A restrição 3 é definida pela limitação do número de soldados produzidos por semana (devido a limitações na demanda):

$$x_1 \leq 40$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 13

2.1. Modelos de Programação Linear em Formato Padrão

O formato padrão de um problema de programação linear com *m* restrições e *n* variáveis é dado por (Bazaraa *et al.*, 1990):

Maximizar (ou minimizar):

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

$$b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0,\ \ldots,\ b_m \geq 0$$

Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. & Sherali, H.D. (1990). *Linear Programming and Network Flows*, 2nd Ed.. New York: John Wiley.

• ***RESTRIÇÕES DE SINAL***

Identificam os tipos de valores que as variáveis podem assumir.

Podem ser de três tipos: ≥ 0 ≤ 0 *irrestrita*

Combinando a função objetivo e as restrições, chega-se a formulação matemática do problema da Politoy:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$2x_1 + x_2 \leq 100$ → *Restrição de horas de acabamento*

$x_1 + x_2 \leq 80$ → *Restrição de horas de carpintaria*

$x_1 \leq 40$ → *Restrição de demanda*

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 14

Algumas características importantes do formato padrão são: (*i*) a função objetivo é do tipo *maximizar* ou *minimizar*; (*ii*) todas as restrições são expressas como equações; (*iii*) todas as variáveis são não-negativas; e (*iv*) a constante no lado direito das restrições é não-negativa.

O formato padrão de um problema de programação linear pode ser escrito, também, em formato matricial, resultando em uma apresentação mais compacta:

Maximizar (ou minimizar): $z = \mathbf{cx}$

sujeito a:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{b} \geq 0$$

onde **A** é uma matriz de dimensão $(m \times n)$, **x** é um vetor $(n \times 1)$, **b** é um vetor $(m \times 1)$ e **c** é um vetor transposto $(1 \times n)$. A matriz **A** é normalmente denominada *matriz das restrições* ou *matriz de coeficientes*; ela contém os coeficientes tecnológicos que compõem as restrições. O vetor **x** é o *vetor de decisão*, já que contém a lista das variáveis de decisão consideradas no problema. O vetor **b** é conhecido como *lado direito das restrições* ou *vetor das necessidades*; ele indica a disponibilidade de recursos associados à cada restrição. Por fim, o vetor **c** é conhecido como *vetor de custos* do problema; ele contém os coeficientes de custo que compõem a função objetivo.

PRÁTICA 1:

Um fazendeiro deseja determinar quantos acres de milho e trigo ele deve plantar esse ano.

Um acre de trigo rende 25 sacas e requer 10 horas de trabalho/semana. A saca vale $4 no mercado.

Um acre de milho rende 10 sacas e requer 4 horas de trabalho/semana. A saca vale $3 no mercado. O governo garante a compra de pelo menos 30 sacas de milho/ano.

O fazendeiro dispõe de 7 acres de terra e pode trabalhar 40 horas/semana.

Formule o problema tal que os ganhos do fazendeiro sejam maximizados.

Prof. Fogliatto   Pesquisa Operacional   15

Um problema qualquer de programação linear pode ser facilmente reescrito em formato matricial, facilitando, posteriormente, a operacionalização do algoritmo *simplex*. Considere o exemplo ilustrativo abaixo:

Maximizar (ou minimizar):

$$z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \quad\quad &= 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 &= 7 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$$

Em notação matricial, tem-se:

$$\underset{(2\times5)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{(2\times1)}{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(5\times1)}{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \underset{(1\times5)}{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução - Prática 1

- Variáveis de Decisão:
  - ➲ x_1 = nº de acres de milho a serem plantados
  - ➲ x_2 = nº de acres de trigo a serem plantados

- Função Objetivo:

$$\text{Max } z = 30x_1 + 100x_2$$

1 acre trigo = 25 sacas
1 saca trigo = $4

$25 \times \$4 = \$100$

ganho / acre trigo

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 16

Nem todos os problemas de programação linear são formulados em formato padrão. No geral, as restrições tendem a aparecer no formato de inequações ($\leq$, $\geq$). O algoritmo *simplex*, utilizado na solução dos problemas de programação linear só pode ser rodado se o problema estiver escrito em formato padrão. Assim, na maioria das aplicações, será necessário converter inequações em equações.

Para converter uma inequação em equação, dois tipos de variáveis poderão ser utilizadas: as variáveis de *folga* e as variáveis de *excesso*. Variáveis de folga são utilizadas para converter inequações do tipo $\leq$ em =; variáveis de excesso são utilizadas para converter inequações do tipo $\geq$ em =. A denominação *folga* e *excesso* pode ser facilmente compreendida através de exemplos.

Considere a restrição

$$x_1 \leq 10$$

que indica o número máximo de operadores disponíveis para executar tarefas no mês 1. Se x_1 assumir o valor 10 no ponto ótimo (ou seja, no alor de x_1 que melhor satisfaz à função objetivo do problema), a inequação assume o formato de uma igualdade. Se x_1 assumir valores inferiores a 10, o número de operadores utilizados será menor que o número disponível; neste contexto, tem-se uma *folga* entre o número de operadores efetivamente utilizados no mês 1 e o número de operadores disponíveis. Assim, para transformar a inequação $x_1 \leq 10$ em equação, insere-se uma variável de folga, f_1, que poderá assumir qualquer valor não-negativo.

Solução - Prática 1

Restrições

- Disponibilidade de terra para cultivo:

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

- Disponibilidade de mão-de-obra:

$$4x_1 + 10x_2 \leq 40$$

- Restrição governamental:

$$10x_1 \leq 30$$

- Restrição de positividade:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 17

Considere uma segunda restrição

$$x_2 \geq 12$$

que indica o número mínimo de unidades do produto 2 a ser manufaturado em um determinado período. Se o número de unidades manufaturadas for exatamente 12 (isto é, $x_2 = 12$), então a restrição passa a assumir o formato de uma equação. Caso contrário, se x_2 for maior que 12, existe um *excesso* no número de unidades produzidas do produto 2. Como esses são os únicos dois cenários possíveis, dentro os cenários viáveis concebidos para o problema, para transfomar-se a inequação acima em equação, basta acrescentar uma variável de excesso, e_1; a variável de excesso só poderá ssumir valores não-negativos.

No formato padrão, problemas de programação linear só podem apresentar variáveis de decisão não-negativas. Em alguns casos, todavia, só é possível uma modelagem eficiente do problema em estudo se algumas variáveis de decisão assumirem também valores negativos. Por exemplo, uma variável de decisão que indica o estoque disponível de um determinado produto assumiria valores positivos sempre que unidades do produto estiverem disponíveis em estoque; valores negativos indicariam escassez do produto (unidades do produto em haver).

Para transformar variáveis *irrestritas no sinal* em variáveis não-negativas, é necessário substituí-las por duas variáveis não-negativas. Por exemplo:

$$I_{11}$$

Solução - Prática 1
Formulação Final

$$\text{Max } z = 30x_1 + 100x_2$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 4x_1 + 10x_2 &\leq 40 \\ 10x_1 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 18

indica o número de unidades do produto 1 disponíveis em estoque ao final do mês 1. I_{11}, por força da formulação do problema, é uma variável irrestrita no sinal. Para contornar esse problema, I_{11} será substituído por duas variáveis, I^+_{11} e I^-_{11}, tal que:

$$I_{11} = I^+_{11} - I^-_{11}$$

e I^+_{11} e I^-_{11} são variáveis não-negativas. Se o estoque do produto 1 estiver escasso em 10 unidades no mês 1, por exemplo, a variável I^-_{11} assume o valor 10 e I^+_{11} permanece igual a 0. Ao substituir-se os valores de I^+_{11} e I^-_{11} na equação acima, a situação de escassez do produto é expressa sem a utilização de variáveis negativas.

Para ilustrar as transformações acima, considere o seguinte exemplo:

Minimizar:

$$z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ &x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ &3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ &x_3 \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

ESPAÇO DE SOLUÇÕES E SOLUÇÃO ÓTIMA

- O ***espaço de soluções*** é formado por todos os pontos que satisfazem as restrições do problema.
- A ***solução ótima*** em um problema de maximização corresponde ao ponto no espaço de soluções onde o valor da função objetivo é máximo.

Prof. Fogliatto   Pesquisa Operacional   19

Para reescrever o problema em formato padrão, as seguintes modificações são necessárias:

(*a*) A variável x_3 deve ser substituída por $x_4 - x_5$, sendo $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$.

(*b*) Os dois lados da última restrição devem ser multiplicados por –1; lembre que as restrições no formato padrão não admitem constantes negativas no lado direito.

(*c*) Introduza uma variável de folga f_1 na primeira restrição e uma variável de excesso e_2 na segunda restrição. Os índices nessas variáveis indicam a restrição onde cada variável foi introduzida.

(*d*) Aloque coeficientes de custo iguais a 0 nas variáveis de folga e excesso. Elas não fazem parte do problema em sua forma original e não devem, assim, alterar a função objetivo.

Seguindo os passos acima, chega-se ao seguinte problema em formato padrão:

Minimizar:

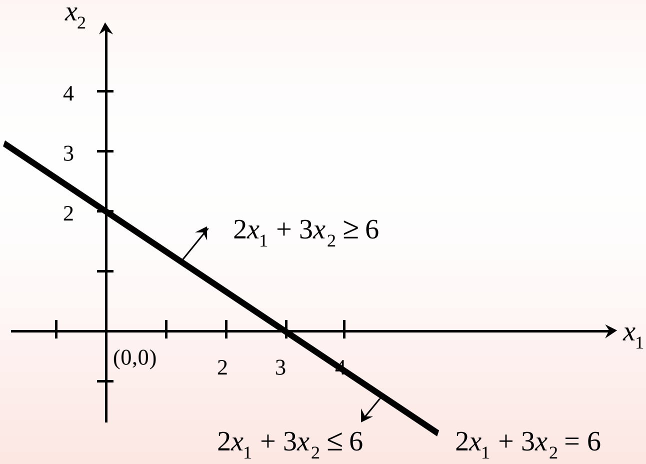
$$z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + f_1 \quad &= 7 \\
x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \quad - e_2 &= 2 \\
-3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 \quad &= 5 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ f_1 \geq 0,\ e_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Representação gráfica

- Representação da restrição $2x_1 + 3x_2 = 6$:



Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 20

Na sequência, alguns conceitos básicos de programação linear são introduzidos a partir da representação matricial de um problema genérico de programação, em formato padrão. Considere o problema:

Maximizar (ou minimizar): $z = \mathbf{cx}$

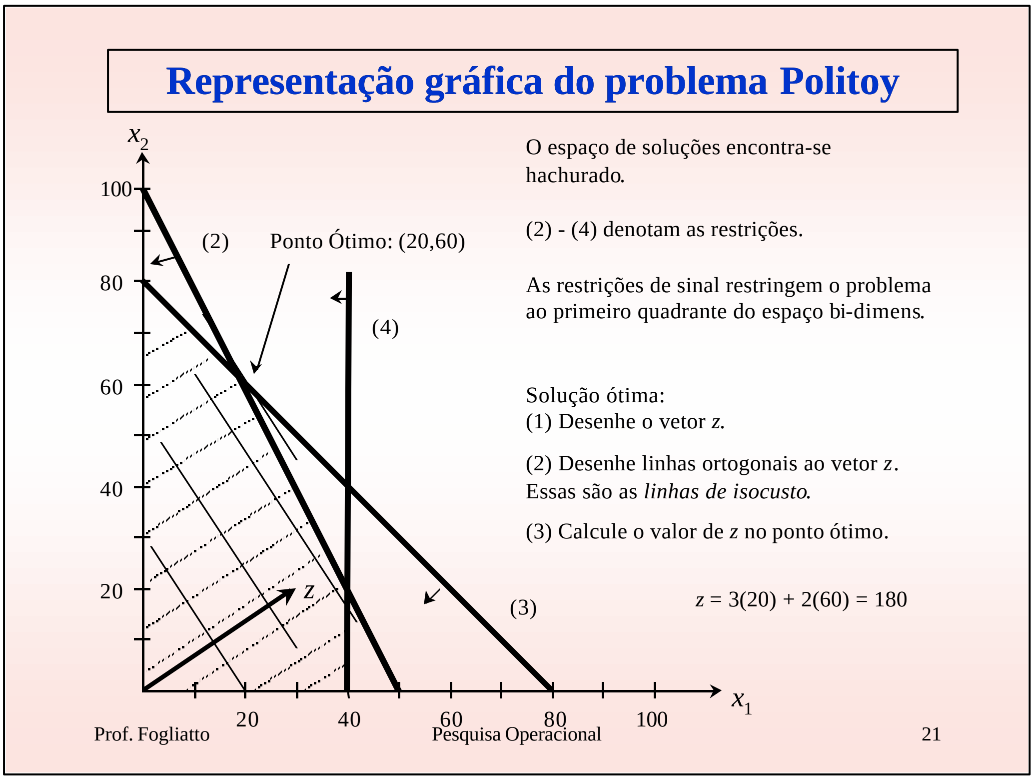
sujeito a:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

1. Uma ***solução viável*** para o problema acima é dada por um vetor não-negativo $\mathbf{x}$ que satisfaça as restrições $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. O ***espaço de soluções viáveis*** do problema acima é composto pelo conjunto S de todas as suas soluções viáveis. Em termos matemáticos,

$$S = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$$

3. Uma ***solução ótima*** é dada por um vetor $\mathbf{x}^o$ correspondente a uma solução viável que resulta num valor de função objetivo $z^o = \mathbf{cx}^o$ maior do que os valores de z obtidos para as demais soluções viáveis do problema. Em tremos matemáticos, $\mathbf{x}^o$ é ótimo se e somente se $\mathbf{x}^o \in S$ e $\mathbf{cx}^o \geq \mathbf{cx}$ para todo $\mathbf{x} \in S$ (nesta definição, o símbolo $\in$ denota pertinência).



4. Quando um problema de programação linear apresentar mais de uma solução ótima, diz-se que tal problema possui ***soluções ótimas alternativas***. Neste contexto, existe mais de uma solução viável para o problema apresentando o mesmo valor ótimo z^o.

5. A solução ótima em um problema de programação linear é dita ***única*** quando não existir nenhuma outra solução ótima alternativa.

6. Quando um problema de programação linear não possuir um solução finita (ou seja, $z^o \to +\infty$ ou $z^o \to -\infty$), diz-se que o problema apresenta uma ***solução ilimitada***.

Restrições críticas (*binding*) e não-críticas

Uma restrição é ***crítica*** (*binding*) se, substituindo os valores correspondentes ao ponto ótimo na restrição, a igualdade de verifica.

Ex.: restrições (2) e (3) no gráfico anterior.

Todas as demais restrições são consideradas ***não-críticas***.

Ex.: restrição (4) e restrições de sinal no gráfico anterior.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 22

2.2. Problemas típicos de programação linear

Alguns modelos de programação linear são adaptáveis a uma gama de situações práticas. Esses modelos são considerados como “típicos”, por serem aplicados em diversos setores produtivos. Nesta seção, cinco famílias de problemas típicos serão consideradas:

A. Escolha do mix de produção

B. Escolha da mistura para rações

C. Planejamento dinâmico da produção

D. Distribuição de produtos através de uma rede de transportes

Outras famílias de problemas típicos podem ser encontradas nos slides 31 a 60 desta apostila. Os exemplos que se seguem foram adaptados de Wagner (1985).

Wagner, H.M. (1985). *Pesquisa Operacional*, 2ª Ed.. São Paulo: Prentice-Hall do Brasil.

Outro exemplo:

Solucione graficamente o problema e identifique o tipo de conjunto de soluções resultante.

Um empresa de eletrodomésticos planeja veicular seus produtos em comerciais de TV durante a novela das 8 e os jogos da seleção na Copa.

Comerciais na novela são vistos por 7 milhões de mulheres e 2 milhões de homens e custam $50000.
Comerciais nos jogos são vistos por 2 milhões de mulheres e 12 milhões de homens, e custam $100000.

Qual a distribuição ideal de comerciais se a empresa deseja que eles sejam vistos por 28 milhões de mulheres e 24 milhões de homens a um menor custo possível?

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 23

A. Escolha do Mix de Produção

Neste tipo de problema, o analista deseja determinar níveis para atividades de produção. Os problemas consideram um horizonte de programação finito. Os níveis (ou intensidade de produção) de cada atividade sofrem restrições de caráter tecnológico e prático. As restrições são expressas em termos matemáticos, a partir das variáveis de decisão selecionadas para o problema.

Suponha uma empresa com quatro tipos distintos de processos e dois produtos, manufaturados a partir destes processos. Os insumos considerados para cada processo/produto são as horas disponíveis de produção e as quantidades disponíveis das matérias-primas. A empresa deseja uma programação da produção para a semana seguinte. Os dados do problema vêm resumidos na tabela abaixo.

	Uma unidd prod. A		Uma unidd prod. B		
	Processo 1	Processo 2	Processo 1	Processo 2	
Recurso					***Total disponível***
Homens-semana	1	1	1	1	15
Libras material Y	7	5	3	2	120
Caixas material Z	3	5	10	15	100
Lucro unitário ($)	4	5	9	11	
Variáveis de Decisão	x_{A1}	x_{A2}	x_{B1}	x_{B2}	

SOLUÇÃO:

Variáveis de decisão:
x_1 = num. de comerciais veiculados durante a novela.
x_2 = num. de comerciais veiculados durante os jogos

Função objetivo:
Min $z = 50x_1 + 100x_2$

A solução gráfica é...

Restrições:
- Público feminino: $7x_1 + 2x_2 \geq 28$
- Público masculino: $2x_1 + 12x_2 \geq 24$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Solução ótima: (3.6, 1.4) com z = \$320. A solução é única.

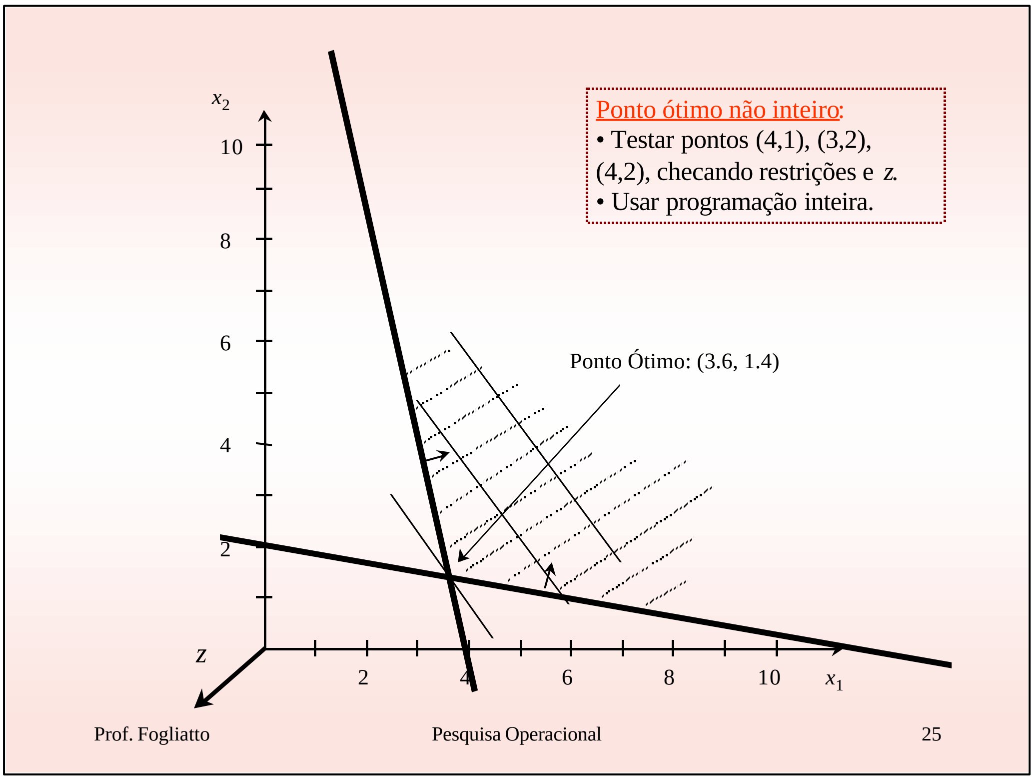
A formulação do problema do mix de produção, utilizando as variáveis de decisão identificadas na tabela, é dada por:

Max $z = 4x_{A1} + 5x_{B1} + 9x_{A2} + 11x_{B2}$

sujeito à:

$$
\begin{aligned}
1x_{A1} + 1x_{B1} + 1x_{A2} + 1x_{B2} &\leq 15 \text{ (mão-de-obra)}\\
7x_{A1} + 5x_{B1} + 3x_{A2} + 2x_{B2} &\leq 120 \text{ (material Y)}\\
3x_{A1} + 5x_{B1} + 10x_{A2} + 15x_{B2} &\leq 100 \text{ (material Z)}\\
x_{A1}, x_{B1}, x_{A2}, x_{B2} &\geq 0 \text{ (não-negatividade)}
\end{aligned}
$$

A função objetivo busca maximizar os lucros oriundos da produção (e conseqüente venda) de cada produto. As restrições dizerm respeito aos insumos, tendo sido formuladas diretamente da Tabela na página anterior. Uma vez tendo suas informações organizadas em uma tabela, a maioria dos problemas de programação linear são de fácil formulação.



B. Escolha da mistura para rações

Neste tipo de problema, o analista deseja determinar níveis de utilização de matérias-primas na composição de uma ração alimentar. As restrições normalmente dizem respeito a características nutircionais desejadas para o produto acabado, quantidades de matérias-primas e insumos disponíveis e demanda a ser atendida.

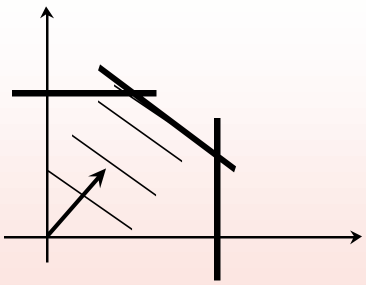
Suponha um problema no qual uma ração deva ser elaborada a partir da mistura de quatro tipos de grãos. Quatro nutrientes são considerados no produto final. As informações que compõem as restrições e função objetivo do problema vêm apresentadas na tabela abaixo.

	Uma unidd de peso de			
	Grão 1	Grão 2	Grão 3	
Nutrientes				***Necessidade Mínima***
A	2	3	7	1250
B	1	1	0	250
C	5	3	0	900
D	0,6	0,25	1	232,5
Custo/unidd de peso ($)	41	35	96	
Variáveis de Decisão	x_1	x_2	x_1	

CASOS ESPECIAIS:

(1) Problemas com soluções alternativas (várias soluções são simultaneamente ótimas).

Nestes casos, a linha de isocusto, ao abandonar o espaço de soluções viáveis, intersecciona com uma linha inteira (e não somente um ponto) desse conjunto.



Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 26

A formulação do problema da mistura para rações, utilizando as variáveis de decisão identificadas na tabela, é dada por:

$$\text{Min } z = 41x_1 + 35x_2 + 96x_3$$

sujeito à:

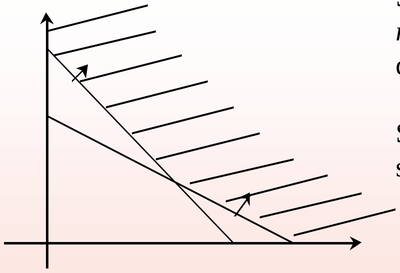
$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &\geq 1250 \quad \text{(nutriente A)}\\
1x_1 + 1x_2 &\geq 250 \quad \text{(nutriente B)}\\
5x_1 + 3x_2 &\geq 900 \quad \text{(nutriente C)}\\
0{,}6x_1 + 0{,}25x_2 + 1x_3 &\geq 232{,}5 \quad \text{(nutriente D)}
\end{aligned}$$

Todas as variáveis de decisão na formulação acima são restritas a valores não-negativos. Um segundo conjunto de restrições poderia ser acrescentado à formulação acima: restrições relacionadas às quantidades disponíveis de cada tipo de grão. Da mesma forma que as restrições acima foram escritas diretamente das linhas da tabela na página anterior, as restrições de disponibilidade de grãos seriam obtidas das colunas da Tabela.

CASOS ESPECIAIS:

(2) Problemas com solução tendendo ao infinito.

Nestes casos, as restrições formam um espaço aberto de soluções viáveis.



Se a função objetivo for do tipo *max*, $z \to \infty$ e a formulação do problema pode estar incorreta.

Se for do tipo *Min*, uma ou mais soluções serão encontradas.

Prof. Fogliatto   Pesquisa Operacional   27

C. Planejamento dinâmico da produção

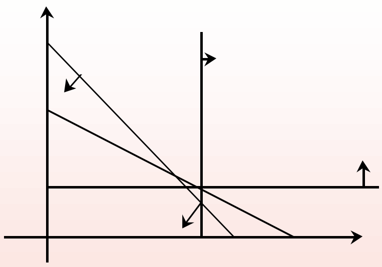
Os exempos vistos anteriormente contemplavam formulações em um único período de tempo. Em situações reais, pode-se desejar formular o problema para gerar soluções específicas para diferentes períodos de tempo. Neste caso, serão necessárias as formulações do tipo multiperíodo.

Considere um problema onde as disponibilidades de matéria-prima, mão de obra, além dos lucros unitários com a venda de produtos variem com o tempo. A estocagem de produtos de um período até períodos futuros é admitida, apesar de um custo de estocagem ser praticado. Esse é um exemplo de programação dinâmica. A divisão deste tipo de problema em sub-problemas que contemplem um único período não oferece bons resultados, já que aspectos como a estocagem de produtos acabados para atender à demanda futura não são considerados.

CASOS ESPECIAIS:

(3) Problemas sem solução

Nestes casos, as restrições não formam nenhum espaço de soluções viáveis.



Suponha uma empresa fabricante de dois tipos de eletrodomésticos, máquinas de lavar louça e máquinas de lavar roupas. A demanda esperada (em unidades) para os próximos quatro trimestres vem dada no quadro abaixo.

		Vendas esperadas (unidd/trimestre)			
Produto	***Designação***	**1**	**2**	**3**	**4**
Lava-louças	E_t	2000	1300	3000	1000
Lava-roupas	M_t	1200	1500	1000	1400

Durante este horizonte de planejamento, deseja-se utilizar a mão-de-obra disponível da melhor maneira possível e produzir as quantidades necessárias de cada tipo de máquina. Estoques são admitidos (ou seja, pode-se estocar máquinas montadas em um trimestre para atender a demanda em trimestres subsequentes). Além disso, a força-de-trabalho é maleável, sendo admitidas demissões e contratações.

Os custos de produção (matérias-primas), mão-de-obra e estocagem de máquinas vem apresentados na tabela abaixo.

Resolva graficamente o problema formulado na Prática 1

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 29

		Custos unitários por trimestre			
Tipo de custo	**Designação**	**1**	**2**	**3**	**4**
Lava-louças (matérias-primas)	c_t	125	130	125	126
Lava-roupas (matérias-primas)	v_t	90	100	95	95
Estocagem lava-louças	j_t	5	4,5	4,5	4
Estocagem lava-roupas	k_t	4,3	3,8	3,8	3,3
Hora de trabalho	p_t	6	6	6,8	6,8

Observe que todas as variáveis de decisão são dependentes do tempo. Em outras palavras, a medida que os trimestres passam, os custos de manufatura e estocagem mudam.

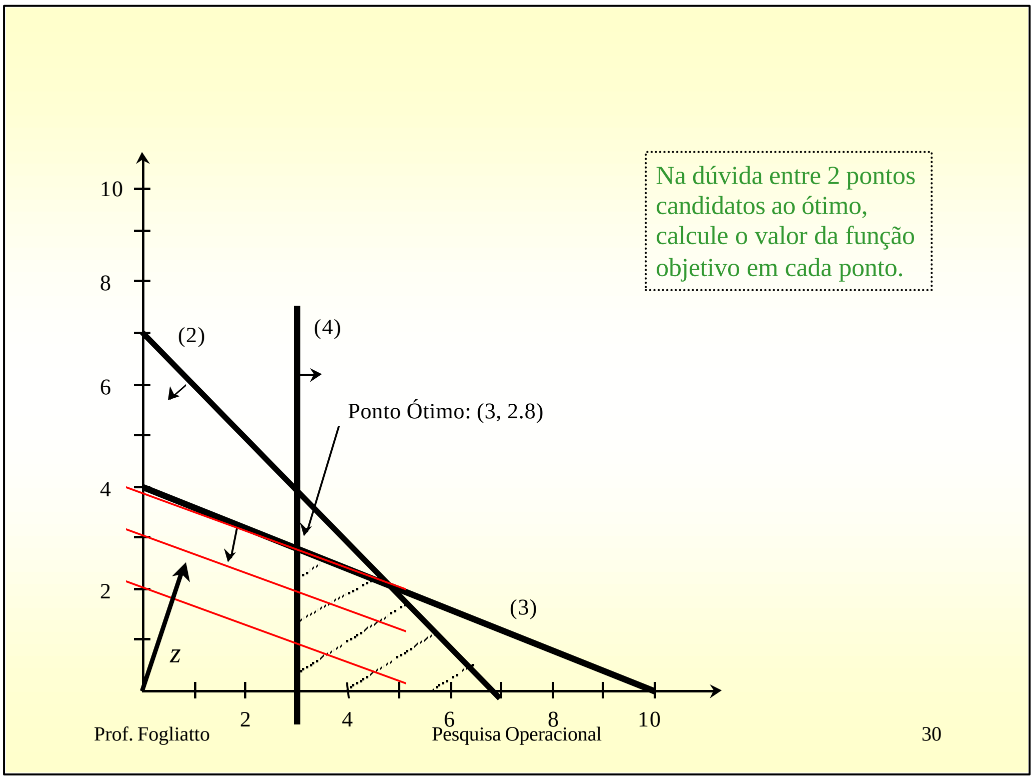
Cada lava-louças demanda 1,5 horas de trabalho e cada lava-roupas demanda 2 horas de trabalho. No início do 1º trimestre, 5000 horas de trabalho estão disponíveis. Por força de acordo sindical, a variação máxima permitida na força-de-trabalho em um determinado trimestre não deve ultrapassar 10% (ou seja, de um trimestre para o outro, não é permitido demitir ou contratar mais de 10% dos funcionários em atividade no trimestre de origem).

As variáveis de decisão do problema são:

d_t = nº de lava-louças produzidas durante o trimestre t.

w_t = nº de lava-roupas produzidas durante o trimestre t.

r_t = estoque de lava-louças disponível no final do trimestre t, descontadas as máquinas utilizadas para suprir a demanda naquele trimestre.



As variáveis de decisão do problema são (continuando):

s_t = estoque de lava-roupas disponível no final do trimestre t, descontadas as máquinas utilizadas para suprir a demanda naquele trimestre.

h_t = número utilizável de horas de trabalho durante o trimestre t.

Para iniciar a programação, consideram-se disponíveis 75 lava-louças e 50 lava-roupas em estoque.

As restrições para o primeiro trimestre devem considerar que a quantidade em estoque no início do trimestre mais a produção naquele trimestre devem ser iguais à demanda e ao estoque remanescente para o trimestre seguinte. Matematicamente, isso pode ser escrito como:

$$d_1 + r_0 = 2000 + r_1 \quad \text{(lava-louças)}$$

$$w_1 + s_0 = 1200 + s_1 \quad \text{(lava-roupas)}$$

Como no fromato padrão o lado direito das restrições não deve conter variáveis de decisão, as restrições são rearranjadas como:

$$d_1 + r_0 - r_1 = 2000$$

$$w_1 + s_0 - s_1 = 1200$$

As horas de trabalho no primeiro trimestre devem respeitar a disponibilidade total de horas disponíveis; isto é:

$$1{,}5d_1 + 2w_1 \leq h_1 \qquad \text{ou} \qquad 1{,}5d_1 + 2w_1 - h_1 \leq 0$$

Problemas Típicos de Formulação

- Escolha da dieta
- Scheduling de pessoal
- Decisão Financeira
- Problema da Mistura
- Programação da Produção

Para garantir que a variação no nível da força-de-trabalho não exceda 10% no primeiro trimestre, são escritas as restrições:

$$h_1 \geq 0{,}9\ (5000) \qquad \text{e} \qquad h_1 \leq 1{,}1(5000)$$

o que resulta em

$$h_1 \geq 4500 \qquad \text{e} \qquad h_1 \leq 5500$$

As restrições para o primeiro trimestre podem ser reescritas para os trimestres $t = 2,\ldots,4$ conforme apresentado abaixo:

$$d_t + r_{t-1} - r_t = E_t$$

$$w_t + s_{t-1} - s_t = M_t$$

$$1{,}5d_t + 2w_t - h_t \leq 0$$

$$h_t \geq 0{,}9h_{t-1} \qquad \text{e} \qquad h_t \leq 1{,}1h_{t-1}$$

A função objetivo deve considerar a minimização de todos os custos incidentes da fabricação, mão-de-obra e estocagem das máquinas nos quatro trimestres. Matematicamente, ela é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}\ \ & [(c_1d_1 + v_1w_1 + j_1r_1 + k_1s_1 + p_1h_1) \\ & + (c_2d_2 + v_2w_2 + j_2r_2 + k_2s_2 + p_2h_2) \\ & + (c_3d_3 + v_3w_3 + j_3r_3 + k_3s_3 + p_3h_3) \\ & + (c_4d_4 + v_4w_4 + j_4r_4 + k_4s_4 + p_4h_4)]. \end{aligned}$$

FORMULAÇÃO 1: Escolha de dieta

Quatro tipos de alimentos estão disponíveis na elaboração da merenda de um grupo de crianças: biscoito de chocolate, sorvete, refrigerante e torta de queijo. A composição desses alimentos e seus preços são:

Alimento (porção)	*Calorias*	*Chocolate (g)*	*Açucar (g)*	*Gordura (g)*	*Preço (porção)*
Biscoito	400	3	2	2	0.5
Sorvete	200	2	2	4	0.2
Refrig.	150	0	4	1	0.3
Torta queijo	500	0	4	5	0.8

As crianças devem ingerir pelo menos 500 calorias, 6 g de chocolate, 10 g de açúcar, e 8 g de gordura.

Formule o problema tal que o custo seja minimizado.

D. Distribuição de produtos através de uma rede de transportes

Os modelos de rede possuem, na maioria dos casos, uma estrutura com *m* pontos de fornecimento e *n* pontos de destino. O problema de programação linear consiste na definição do melhor caminho (ou rota) a ser utilizada para fazer com que uma determinada quantidade de produtos de um ponto de fornecimento chegue à um ponto de destino.

Problemas de planejamento dinâmico da produção também podem ser tratados através de modelos de redes. Neste caso, a decisão passa a ser quanto produzir num determinado mês para consumo naquele mês e quanto deve ser produzido para estoque, para consumo nos meses subseqüentes.

Suponha uma empresa com *m* plantas distribuídas em um determinado país. A produção máxima de cada planta é designada por S_i, onde o índice i designa a planta em questão ($i = 1,\ldots, m$).

Existem *n* pontos de demanda a serem abastecidos pela empresa. Cada ponto de demanda requer D_j unidades do produto em questão. O índice j denota os pontos de demanda, tal que $j = 1,\ldots, n$.

Associado a cada par (i, j) existe um custo c_{ij}, que é o custo de fornecer o produto ao ponto de demanda j a partir da planta i.

O problema acima pode ser organizado em uma tabela, conhecida como *tableau* dos transportes. Essa tabela vem apresentada a seguir.

- **Variáveis de decisão**:

x_1 = porções de biscoitos;
x_2 = porções de sorvete;
x_3 = porções de refrigerante;
x_4 = porções de torta de queijo;

- **Função objetivo**:

(custo total) = (custo dos biscoitos) + (custo do sorvete) + (custo do refrigerante) + (custo da torta de queijo)

$$\text{Min } z = 50\,x_1 + 20\,x_2 + 30\,x_3 + 80\,x_4$$

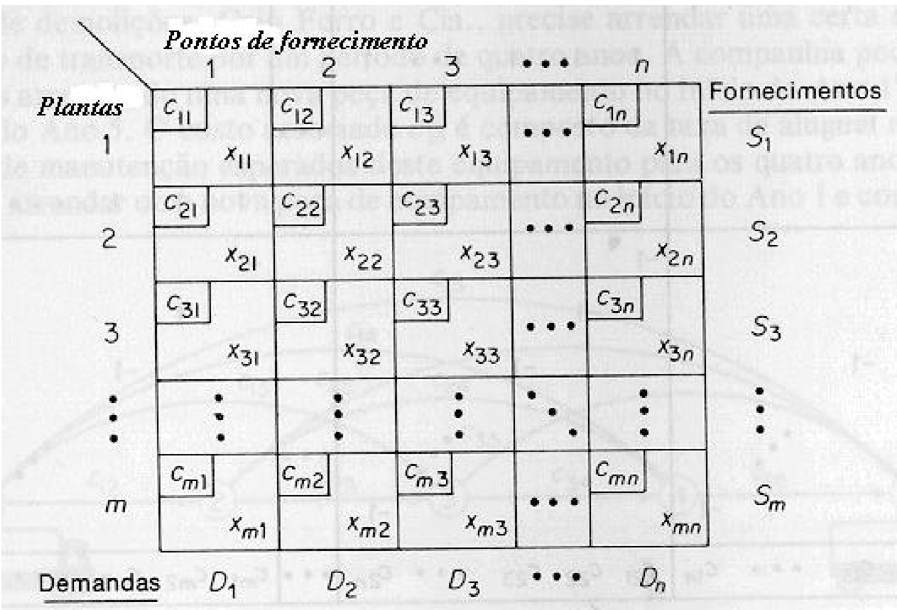


Figura 2.2.1. *Tableau* dos transportes (Fonte: Wagner, 1986).

A formulação de um problema de transportes pode ser obtida diretamente das linhas e colunas do table na Figura 2.2.1. As restrições de fornecimento (capacidade) são obtidas das linhas da tabela; as restrições de demanda, das colunas da tabela.

- **Restrições**:

(1) Ingestão mínima de 500 calorias;
(2) Ingestão mínima de 6 g de chocolate;
(3) Ingestão mínima de 10 g de açúcar;
(4) Ingestão mínima de 8 g de gordura.

(1) $400\,x_1 + 200\,x_2 + 150\,x_3 + 500\,x_4 \geq 500$

(2) $3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 3$

(3) $2\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 4\,x_4 \geq 10$

(4) $2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 5\,x_4 \geq 8$

Variáveis $\geq$ 0.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 34

Seja x_{ij} o número de unidades remetidas da planta i ao ponto de fornecimento j. O custo associado à remessa de uma unidade do produto de i para j é c_{ij}. O modelo matemático do problema descrito acima é dado por:

Minimizar $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

sujeito a:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq S_i$, para $i = 1,\ldots, m$ (capacidade)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq D_j$, para $j = 1,\ldots, n$ (demanda)

$x_{ij} \geq 0$

Observe que uma solução ótima para o problema pode indicar uma mesma planta fornecendo para vários pontos de demanda, ou um ponto de demanda recebendo os produtos demandados de diversas plantas.

FORMULAÇÃO 2: Otimização da Força de Trabalho

Uma agência de correios necessita de um número diferente de funcionários, de acordo com o dia da semana:

Dia	*Empr.*	*Dia*	*Empr.*	*Dia*	*Empr.*	*Dia*	*Empr.*
Seg.	17	Quarta	15	Sexta	14	Dom.	11
Terça	13	Quinta	19	Sáb.	16		

Por exigência sindical, cada trabalhador trabalha cinco dias consecutivos e descansa dois.

Formule o problema tal que o número de empregados contratados seja o mínimo necessário para atender às necessidades de mão-de-obra.

3. ALGORITMO SIMPLEX

Um *simplex* é uma forma geométrica com uma propriedade especial, a saber. Uma linha que passe por quaisquer dois pontos pertencentes à um simplex deve estar contida inteiramente dentro do simplex. Por exemplo, A Figura 3.1(a) traz um exemplo de uma figura geométrica que não apresenta a propriedade acima. Em contrapartida, a Figura 3.1(b) apresenta a propriedade que caracteriza uma *simplex*. De forma geral, a área formada pela intersecção das restrições de um problema de programação linear (PL) é uma forma geométrica do tipo *simplex.* Conforme visto anteriormente, a região formada pela intersecção das restrições de um problema de PL é denominada espaço de soluções viáveis.

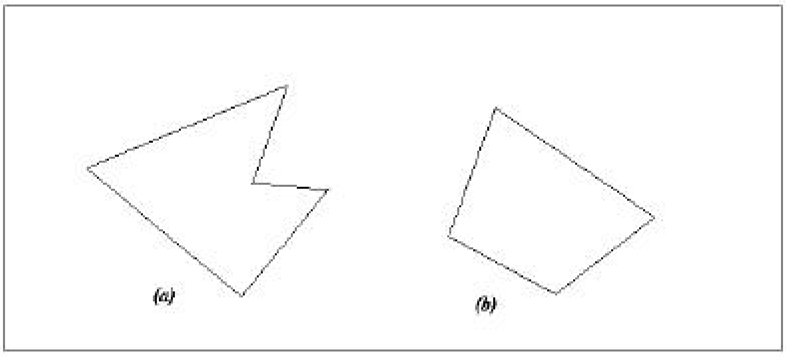


Figura 3.1. Exemplos de formas geometricas.

- **Variáveis de decisão**:

x_i = núm. de empregados trabalhando no dia i;

- **Função objetivo**:

$$\text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

- **Restrições**:

$$\begin{array}{l}
x_1 \geq 17 \\
x_2 \geq 13 \\
x_3 \geq 15 \\
x_4 \geq 19 \\
x_5 \geq 14 \\
x_6 \geq 16 \\
x_7 \geq 11 \\
x_i \geq 0
\end{array}$$

Qual o problema com essa formulação?

Num espaço bi-dimensional, a região formada pelo espaço de soluções viáveis é um plano. A equação que representa a função-objetivo pode ser representada na forma de um vetor, digamos ***c***. Desta forma, seguindo a direção de melhoria da função objetivo determinada pelo vetor ***c*** dentro do espaço de soluções viáveis, é possível encontrar o ponto ótimo. A busca garante que (*a*) o ponto ótimo maximiza ou minimiza a função objetivo, sendo seu valor máximo ou mínimo, respectivamente; e (*b*) o ponto ótimo satisfaz o conjunto das restrições que compõem o problema de programação linear, já que a busca pelo ótimo se restringiu ao espaço de soluções viáveis do problema em estudo. O mesmo raciocínio pode ser estendido a problemas de maior dimensionalidade.

Considere o conjunto formado por todos os problemas de programação linear para os quais existe um espaço de soluções viáveis. Pode-se demonstrar que tais espaços são formas geométricas do tipo *simplex* (ver Bazaraa *et al.*, 1990; p. 94). Ao rastrear-se o espaço de soluções viáveis de um problema de PL em busca do ponto ótimo, este deverá corresponder a um dos pontos extremos do simplex, o que, na prática, poderá corresponder a um ponto, uma reta, um plano ou outra forma de maior dimensão.

O algoritmo *simplex* pode ser descrito de maneira bastante simplificada, conforme apresentado a seguir. Considere um espaço de soluções viáveis bi-dimensional e um vetor ***c*** formado pelos coeficientes de custo da função objetivo e posicionado na origem do plano bidimensional. Considere um ponto extremo *p* qualquer do espaço de soluções viáveis e um vetor que passe

PROBLEMAS

(1) A função-objetivo não é o número de funcionários, como se imagina. Cada funcionário está sendo computado 5 vezes.

Por ex.: um funcionário que começa a trabalhar na segunda, trabalha de segunda a sexta e está incluído nas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

(2) A inter-relação entre as variáveis $x_1, x_2, ..., x_5$ não está capturada na formulação.

Por ex.: alguns funcionários que trabalham na segunda estarão trabalhando na terça. Ou seja x_1 e x_2 estão inter-relacionadas mas isso não aparece na formulação.

pela origem e pelo referido ponto, digamos ***p***. Se a busca pelo ótimo iniciar, por exemplo, no ponto de origem do espaço bidimensional, a função objetivo tenderá a apresentar melhoria sempre que o ângulo formado pelos vetores ***c*** e ***p*** for inferior a $\pm 90°$. Quando esse não for o caso, o avanço irá na direção contrária do vetor ***c*** (que indica a direção de melhoria da função objetivo) e qualquer movimento naquela direção será desinteressante.

Por analogia, considere o conjunto de todos os pontos extremos do espaço de soluções viáveis e os vetores que partem da origem até estes pontos. A partir de um ponto inicial qualquer no espaço de soluções viáveis (por exemplo, o ponto correspondente à origem do espaço bi-dimensional), é possível determinar a direção de maior melhoria investigando os ângulos formados entre o vetor ***c*** e os demais vetores, formados a partir da união da origem aos pontos extremos do simplex; o menor ângulo ***cp*** corresponde à melhor direção para movimento.

O mesmo mecanismo de busca pode ser descrito em termos algébricos. Para tanto, algumas definições prévias são necessárias. A primeira delas diz respeito a variáveis *básicas* e *não-básicas*. Um exemplo deve auxiliar a introduzir esses conceitos.

Considere o seguinte exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& \qquad x_2 \le 1 \\
& x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

FORMULAÇÃO CORRETA

- **Variáveis de decisão**:

x_i = núm. de empregados ***começando*** a trabalhar no dia i;

Cada empregado começa a trabalhar em um único dia, não sendo assim contados mais de uma vez.

- **Função objetivo**:

$$\text{Min } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 38

Após introduzir as variáveis de folga f_1 e f_2, o problema passa a ser escrito como:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Max} & x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{s.a} & x_1 & + & 2x_2 & + f_1 & & = & 4 \\
 & & & x_2 & & + f_2 & = & 1 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Geometricamente, o problema pode ser representado da seguinte forma:

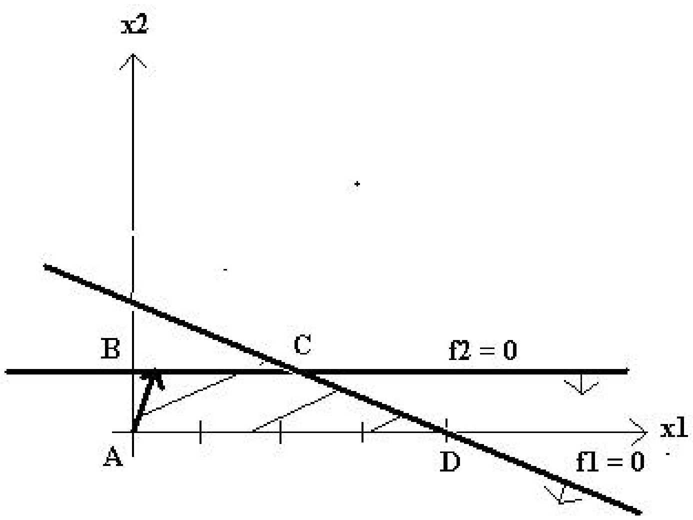


Figura 3.2. Representação de um problema de PL em um espaço bidimensional.

- **17 funcionários devem estar trabalhando na segunda.**

Quem estará trabalhando segunda?

x_i = trabalham nos dias i, i+1, i+2, i+3, i+4;

i = 1 (segunda). Assim, estarão trabalhando na segunda os empregados $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.

Assim, a restrição referente ao número de empregados trabalhando na segunda será:

$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$

Os demais dias serão formulados de maneira similar.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 39

Observe que para traçar as retas correspondentes às restrições, basta equacioná-las para determinar os pontos de intersecção com os eixos x_1 e x_2. Por exemplo, a primeira restrição intercepta o eixo x_1 quando $x_2 = 0$. Ignorando a variável de folga associada à primeira restrição (f_1) e transformando a inequação em equação, tem-se:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$x_1 + 2(0) = 4$$
$$x_1 = 4$$

Repetindo o procedimento, para o caso em que $x_1 = 0$, determina-se o ponto onde a primeira restrição intersecciona o eixo x_2; isto é:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$0 + 2x_2 = 4$$
$$x_2 = 2$$

Sendo assim, para representar a primeira restrição no espaço bidimensional (x_1, x_2), basta identificar os pontos (x_1, x_2) = (4, 0) e (x_1, x_2) = (0, 2) e traçar uma reta que passe pelos dois pontos. Na Figura 3.2, a reta correspondente à primeira restrição vem identificada como $f_1 = 0$. Tal identificação é procedente, já que exatamente sobre a reta, a variável de folga assume um valor igual a 0 e a inequação correspondente à restrição assume o formato de uma equação.

- **Restrições**:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 17 \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &\geq 19 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 14 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 16 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 11 \\
x_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

A solução ótima é $x_1 = 4/3$; $x_2 = 10/3$; $x_3 = 2$; $x_4 = 22/3$
$x_5 = 0$; $x_6 = 10/3$; $x_7 = 5$.
x_i fracionário não faz sentido.
Arredondando-se chegamos a uma solução que, quando checada via otimização inteira, resulta completamente sub-ótima.
Para esses problemas precisamos de ***programação inteira.***

Para representar-se graficamente a segunda restrição, adota-se procedimento idêntico aquele descrito nos parágrafos anteriores. A segunda restrição vem representada na Figura 3.2 como $f_2 = 0$.

Considere o ponto A, correspondente à origem do espaço (x_1, x_2). Para representar-se o ponto A em termos das coordenadas (x_1, x_2), escreve-se (x_1, x_2) = (0, 0). Todavia, o número total de variáveis do problema exemplo é quatro: x_1, x_2, f_1 e f_2. Já que (x_1, x_2) = (0, 0), pode-se perguntar quais os valores assumidos por f_1 e f_2. Como na origem está-se distante das retas correspondentes às restrições, é natural imaginar-se que alguma folga exista nas restrições. Sendo assim, além de saber-se com certeza que (x_1, x_2) = (0, 0), sabe-se também que $f_1 > 0$ e $f_2 > 0$.

Num espaço bidimensional a representação de qualquer ponto deverá ser feita através de dois valores ≥ 0. Tais valores podem ser atribuídos às variáveis x_1, x_2, f_1 e f_2. Na prática, em qualquer ponto do espaço representado na Figura 3.2, todas as variáveis assumirão um valor. Todavia, como a dimensão do problema é igual a 2 (já que temos somente duas restrições), sabe-se que apenas duas das quatro variáveis poderão assumir valores >0. Na origem, essas variáveis serão f_1 e f_2. Assim, diz-se que as variáveis f_1 e f_2 formam (ou compõem) a **base** no ponto A. As variáveis x_1 e x_2 são variáveis não-básicas, já que não dispõe-se de espaço para mais do que duas variáveis na base. Variáveis básicas podem assumir valores ≥ 0. Variáveis não-básicas só podem assumir valor = 0.

FORMULAÇÃO: Decisão Financeira

- O conceito de ***valor líquido presente***:

Considere que \$1 investido hoje valerá mais de \$1 daqui há um ano. O novo valor dependerá da taxa anual de juros, r.

Assim:

$$\$1 \text{ hoje} = \$(1 + r)^k \text{ em } k \text{ anos}$$

ou

$$\$\,1 \text{ recebidos em } k \text{ anos} = \$\,(1 + r)^{-k} \text{ hoje}$$

$$\$\,x \text{ recebidos em } k \text{ anos} = \$x \,/\, (1 + r)^{k} \text{ hoje}$$

O valor líquido presente (VLP) de um investimento é determinado “descontando” o fluxo de caixa de um investimento até o tempo atual, ou tempo 0.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 41

Considere o ponto B na Figura 3.2, correspondente à intersecção da segunda restrição ($f_2 = 0$) e do eixo x_2. Neste ponto, as variáveis básicas são x_2 e f_1. Se x_2 fosse uma variável não-básica, por exemplo, jamais seria possível representar o ponto B, já que naquele ponto $x_2 = 1$. O mesmo raciocínio se aplica à variável de folga f_1. Se essa variável estivesse for a da base, o ponto B deveria localizar-se, necessariamente, sobre a primeira restrição (onde $f_1 = 0$, como a prórpia identificação da restrição indica). No ponto B, as variáveis não-básicas são x_1 e f_2.

Continuando, no ponto C (intersecção das duas restrições), as variáveis básicas são x_1 e x_2. As variáveis de folga são não-básicas. Finalmente, no ponto D (intersecção da primeira restrição com o eixo x_1), as variáveis básicas são x_1 e f_2 e as variáveis não básicas são x_2 e f_1.

Considere a representação matricial de um problema de PL introduzida na seção 2.1. Os vetores **c**, **x** e **b** e a matriz **A** devem ser expressos em termos das variáveis básicas e não-básicas que compõem o problema. A representação do problema na Figura 3.2, no ponto A, por exemplo, será:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & f_1 & f_2 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \end{array} \qquad \mathbf{c}^t = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & f_1 & f_2 \end{matrix} \\ [1, \; 3, \; 0, \; 0] \end{array} \qquad \mathbf{x}^t = [x_1, x_2, f_1, f_2]$$

$$\mathbf{b} = \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO:

Investim. 1 = requer um investimento de \$10,000 no tempo 0 e de \$14,000 em 2 anos e tem um retorno de \$24,000 em 1 ano.

Investim. 2 = requer um investimento de \$6,000 no tempo 0 e de \$1,000 em 2 anos e tem um retorno de \$8,000 em 1 ano.

Qual o melhor investimento (r = 0.2)?

$$VLP\ (Inv.\ 1) = -10{,}000 + (24{,}000/1+0.2) - [14{,}000/(1+0.2)^2] = \$277.78$$

$$VLP\ (Inv.\ 2) = -6{,}000 + (8{,}000/1+0.2) - [1{,}000/(1+0.2)^2] = -\$27.78$$

O investimento 1 é bem melhor!

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 42

Como no ponto A as variáveis f_1 e f_2 compõem a base, as matrizes e vetores apresentados acima podem ser divididos simplesmente em termos de seus componentes básicos e não-básicos. Para padronizar a apresentação, as variáveis básicas sempre vêm apresentadas antes das não-básicas. No exemplo anterior, os vetores e matrizes seriam reescritos como:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \quad\mathbf{B} \qquad \mathbf{NB} \\ \left[f_1 \ \ f_2 \mid x_1 \ \ x_2 \right] \end{array} \qquad \mathbf{c}^t = \begin{array}{c} \quad\mathbf{B} \qquad \mathbf{NB} \\ \left[f_1, \ \ f_2 \mid x_1, \ \ x_2 \right] \end{array}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^t = \begin{array}{c} \quad\mathbf{B} \qquad \mathbf{NB} \\ \left[f_1, \ f_2 \mid x_1, \ x_2 \right] \end{array}$$

As colunas na matriz **A** são numeradas de a_1 até a_n (no exemplo, n = 4), conforme apresentado no exemplo.

De uma maneira genérica, qualquer problema de PL poderá ser representada em termos dos vetores **c**, **x** e **b** e da matriz **A** particionados em suas porções básicas e não-básicas. Cada porção deverá compor as variáveis de decisão atualmente na base e fora-da-base, respectivamente.

Por exemplo:

EXEMPLO DE FORMULAÇÃO:
Formulação 3

Uma empresa está considerando 5 oportunidades de investimento, com características dadas a seguir:

	Inv. 1	*Inv. 2*	*Inv. 3*	*Inv. 4*	*Inv. 5*
Gasto t =0	$11	$53	$5	$5	$29
Gasto t =1	$3	$6	$5	$1	$34
VLP	$13	$16	$16	$14	$39

A empresa tem $40 disponíveis para investimento no tempo $t = 0$ e estima dispor de $20 no tempo $t = 1$. Capital não investido em t=0 não estará disponível em $t = 1$. Frações de cada investimento podem ser compradas.

Formule o problema tal que o VLP da companhia seja maximizado.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 43

$\mathbf{c}^t = [\mathbf{c}_B | \mathbf{c}_N]$ $\quad$ $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}]$ $\quad$ $\mathbf{b}^t = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ $\quad$ $\mathbf{x}^t = [\mathbf{x}_B | \mathbf{x}_N]$

O algoritmo *simplex* pode ser derivado através da seguinte equação, que compõe o sistema de restrições de um problema de PL:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

A solução do sistema de equações acima pode ser obtida resolvendo o sistema para **x**. Para tanto, basta multiplicar os dois lados da igualdade por $\mathbf{A}^{-1}$ (lembre que $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, onde **I** designa uma matriz identidade; ver revisão de Álgebra Linear a partir do slide 90):

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Reescrevendo a primeira equação utilizando matrizes e vetores particionados em variáveis básicas e não-básicas resulta em:

$$[\mathbf{B} | \mathbf{N}] \times \left[\frac{\mathbf{x_B}}{\mathbf{x_N}}\right] = \mathbf{b}$$

- **Variável de decisão**:

A empresa deseja determinar qual fração de cada investimento deve ser comprada:

x_i = fração do investimento i comprada pela empresa.

- **Função objetivo**:

Consiste em maximizar os VLP dados na tabela:

$$\text{Max } z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5$$

Procedendo com a multiplicação entre os vetores no lado esquerdo da igualdade, obtemos:

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}$$

e então:

$$\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b} - \mathbf{Nx_N}$$

resolvendo a equação acima para $\mathbf{x_B}$, isto é, multiplicando-se ambos os lados da equação por $\mathbf{B}^{-1}$, obtém-se:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}$$

A matriz **N**, derivada de **A** e correspondendo às colunas não-básicas de **A**, pode ser escrita em termos de suas colunas não-básicas $\mathbf{a_j}$. O mesmo pode ser feito para o vetor $\mathbf{x_N}$, que contém as variáveis de decisão não-básicas; o vetor $\mathbf{x_N}$ pode ser escrito em termos de suas variáveis de decisão não-básicas x_j.

Para reescrever **N** e $\mathbf{x_N}$ conforme sugerido acima, é necessário observar a equivalência de duas representações algébricas, descritas a seguir.

Sejam **N** e $\mathbf{x_N}$ dados por:

- **Restrições**:

(1) A empresa não pode investir mais de $40 no tempo 0:

$$11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40$$

(2) A empresa não pode investir mais de $20 no tempo 1:

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20$$

Falta alguma restrição?

(3) A empresa não pode comprar mais que 100% de nenhum investimento:

$$x_i \leq 1$$

(4) Todas as variáveis devem ser positivas.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 45

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_P]$$

$$\mathbf{x}_\mathbf{N}^t = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_P]$$

Observe que **N** é uma matriz; assim, suas partes componentes são *vetores*, designados por $\mathbf{a}_j$. Tal designação é pertinente, já que a matriz **N** é uma partição da matriz de restrições **A**. Consequentemente, as colunas de **N** devem constituir um subconjunto das colunas de **A**. Tal subconjunto de variáveis não-básicas será designado, doravante, por *R*.

Existe um total de *N* colunas em **A**, uma associada a cada variável de decisão do problema. Das *N* colunas de **A**, *P* correspondem a variáveis não-básicas. Assim, os índices em **N** e $\mathbf{x}_\mathbf{N}$ variam de $j = 1,\ldots, P$. Note que as variáveis x_j não-básicas compõem o conjunto *R*.

Deseja-se reescrever **N** e $\mathbf{x}_\mathbf{N}$ tornando explicitas as suas colunas e variáveis não-básicas, respectivamente. Para tanto, utiliza-se a seguinte equivalência:

$$\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} = \sum_{j \in R} \mathbf{a}_j x_j$$

A validade da equivalência acima é demonstrada a seguir através de um exemplo.

PRÁTICA 2:

A empresa X deseja determinar quanto dinheiro investir e quanto dinheiro tomar emprestado no próximo ano. Cada real investido pela empresa reduz o VLP em 10 centavos e cada real tomado em empréstimo aumenta o VLP em 50 centavos (vale mais a pena tomar emprestado do que investir).

X pode investir no máximo $1000000. O débito pode somar até 40% do que for investido.

X dispõe de $800000 em caixa.

Todo o investimento deve ser pago com o dinheiro em caixa ou com dinheiro emprestado.

Formule o problema tal que o VLP de X seja maximizado.

Resolva o problema graficamente.

Seja **N** uma matriz (2×3) constituída dos seguintes elementos:

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{matrix} \end{array}$$

Por conveniência e para manter a consistência notacional, as três colunas da matriz **N** acima são denominadas $\mathbf{a}_j$, $j = 1,2,3$.

Associada a cada coluna de **N** existe uma variável de decisão x_j. Essas variáveis vêm apresentadas no vetor $\mathbf{x_N}$, abaixo:

$$\mathbf{x}_\mathbf{N}^t = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

O produto $\mathbf{N}\mathbf{x_N}$, utilizando a matriz e vetor acima, resulta em:

$$\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}^t = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

FORMULAÇÃO: Problema da Mistura

Situações onde várias matérias-primas devem ser misturadas em proporções ideais são modeláveis via programação linear.

Alguns exemplos:

(1) Mistura de vários tipos de óleos para produzir diferentes tipos de gasolina.

(2) Mistura de compostos químicos para gerar outros compostos.

(3) Mistura de ingredientes para produção de rações.

(4) Mistura de diferentes tipos de papéis para produzir um papel reciclado.

Prof. Fogliatto   Pesquisa Operacional   47

A representação alternativa desse produto utiliza o somatório:

$$\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathbf{N}} = \sum_{j\in R} \mathbf{a}_j x_j$$

No exemplo, j = 1, 2, 3. Então:

$$\sum_{j\in R} \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

Comparando o resultado acima com aquele obtido a partir do produto $\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathbf{N}}$, é possível verificar a validade da equivalência proposta.

De maneira análoga, é possível demonstrar que o produto entre dois vetores, por exemplo,

$$\mathbf{c}_{\mathbf{N}}^t \mathbf{x}_{\mathbf{N}}$$

pode ser representado, alternativamente, como:

$$\sum_{j\in R} c_j \times x_j$$

EXEMPLO (Formulação 4): O caso Texaco

A Texaco produz até 14000 barris/dia de 3 tipos de gasolina misturando 3 tipos de óleos. Dados a respeito das gasolinas e óleos são:

	Preço Venda	Deman da/dia	Preço produção		Preço compra	Disponi-bilidade
Gas 1	$70	3000	$4	Óleo 1	$45	5000
Gas 2	$60	2000	$4	Óleo 2	$35	5000
Gas 3	$50	1000	$4	Óleo 3	$25	5000

Agora é possível representar as matrizes e vetores da equação:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$$

utilizando somatórios. Assim, explicitam-se as variáveis não-básicas na equação. A representação é dada por:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in R} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j \qquad (1)$$

lembrando que j é o índice que designa as variáveis não-básicas e R denota o conjunto de todas as variáveis não-básicas.

Por conveniência, algumas porções da equação (1) acima são assim renomeadas:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \overline{\mathbf{b}}$$
$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{y}_j$$

Reescrevendo a equação (1) em termos das substituições, tem-se:

$$\mathbf{x_B} = \overline{\mathbf{b}} - \sum_{j\in R} \mathbf{y}_j x_j$$

EXEMPLO (Formulação 4): O caso Texaco

As gasolinas têm especificações de octanagem e conteúdo de enxofre dadas abaixo. A mistura de óleos para produção de gasolina deve satisfazer essas especificações.

	Oleo 1	Oleo 2	Oleo 3	Gas 1	Gas 2	Gas 3
Ocatanagem	12	6	8	10	8	6
Enxofre (%)	0.5	2.0	3.0	1.0	2.0	1.0

Cada $/dia gasto em publicidade c/ qualquer tipo de gasolina, aumenta em 10 barris a venda daquele tipo de gasolina. Formule este problema tal que a Texaco maximize seus lucros diários (= receita-despesa).

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 49

A função objetivo de um problema genérico de PL pode ser escrita em termos dos vetores de custos e das variáveis de decisão do problema. Em termos matemáticos:

$$z = \mathbf{c}^t\mathbf{x}$$

Mais uma vez particionando os vetores em termos de variáveis básicas e não-básicas, obtém-se:

$$z = \left[\mathbf{c}_\mathbf{B} \mid \mathbf{c}_\mathrm{N}\right] \times \left[\frac{\mathbf{x}_\mathbf{B}}{\mathbf{x}_\mathrm{N}}\right] = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t\mathbf{x}_\mathbf{B} + \mathbf{c}_\mathrm{N}^t\mathbf{x}_\mathrm{N}$$

O vetor $\mathbf{x}_\mathbf{B}$ acima pode ser reescrito conforme apresentado na equação (1). Após substituição, obtém-se:

$$z = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t\left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in R}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j\right] + \mathbf{c}_\mathrm{N}^t\mathbf{x}_\mathrm{N}$$

Efetuando-se a primeira multiplicação no somatório acima, obtém-se:

$$z = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in R}\mathbf{c}_\mathbf{B}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j + \mathbf{c}_\mathrm{N}^t\mathbf{x}_\mathrm{N}$$

- **Variáveis de decisão**:

A Texaco deve decidir sobre (*i*) quanto dinheiro gastar na publicidade de cada tipo de gasolina e (*ii*) qual a mistura apropriada de óleos.

a_i = \$/dia gasto na publicidade da gasolina *i*.
x_{ij} = barris de óleo *i* gastos/dia para produzir gasolina *j*.

- **Função objetivo**:

Primeiro, note que:

$x_{11} + x_{12} + x_{13}$ = bar.óleo 1 consum./dia.
$x_{21} + x_{22} + x_{23}$ = bar.óleo 2 consum./dia.
$x_{31} + x_{32} + x_{33}$ = bar.óleo 3 consum./dia.

$x_{11} + x_{21} + x_{31}$ = bar.gas.1 prod./dia.
$x_{12} + x_{22} + x_{32}$ = bar.gas.2 prod./dia.
$x_{13} + x_{23} + x_{33}$ = bar.gas.3 prod./dia.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 50

O último termo na expressão acima deve ser explicitado em função das variáveis não-básicas; ou seja,

$$z = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{t}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in R} \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{t}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j + \sum_{j\in R} c_j x_j$$

Por conveniência, renomeia-se o primeiro termo da equação acima:

$$z_0 = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{t}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Observe que o valor z_0 na equação acima corresponde ao valor *atual* da função objetivo. Como as variáveis não-básicas assumem valor igual a 0 por definição (ou seja, $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$), o segundo termo à direita da expressão

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$$

desaparece. Logo,

$$z_0 = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{t}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{t}\mathbf{x_B}$$

o que efetivamente corresponde ao valor atual da função objetivo, considerando a base atual representada por $\mathbf{x_B}$.

- **Função objetivo**:

(1) Ganhos/dia com vendas de gasolina:

$70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33})$

(2) Custo/dia da compra de óleo:

$45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33})$

(3) Custo/dia com propaganda:

$a_1 + a_2 + a_3$

(4) Custo/dia produção:

$4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33})$

Lucro diário: (1) - (2) - (3) - (4)

Assim, a expressão:

$$z = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in R} \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j + \sum_{j \in R} c_j x_j$$

pode ser reescrita como:

$$z = z_0 - \sum_{j \in R} \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j + \sum_{j \in R} c_j x_j$$

Como os dois somatórios consideram o mesmo domínio (ou seja, as variáveis não-básicas pertencentes ao conjunto R), pode-se agrupar os dois termos de somatório num único termo:

$$z = z_0 - \sum_{j \in R} \left(\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j\right) x_j$$

Como $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{y}_j$, tem-se:

$$z = z_0 - \sum_{j \in R} \left(\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{y}_j - c_j\right) x_j$$

Para finalizar esta primeira etapa do desenvolvimento do algoritmo simplex e obter-se o primeiro resultado, uma última substituição é necessária; a saber:

$$z_j = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{y}_j$$

- **Função objetivo**:

Max $z = 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + 41x_{31} +$
$31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3$

- **Restrições**:

(1-3) Gas 1-3 produzida diariamente deve ser igual a demanda (não queremos estocar gasolina).

Demanda diária gas 1: 3000 + demanda gas 1 gerada por publicidade
$= 3000 + 10a_1$

Demanda gas 2: $2000 + 10a_2$

Demanda gas 3: $1000 + 10a_3$

Assim:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} - 10a_1 &= 3000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} - 10a_2 &= 2000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} - 10a_3 &= 1000 \end{aligned}$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 52

Assim, a expressão para z passa a ser escrita como:

$$z = z_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

<u>1º resultado</u>:

z_0 representa o valor atual (ou presente) da função objetivo. Num problema de maximização, o valor de z pode ser melhorado se $z_j - c_j < 0$, para qualquer $j \in R$. Num problema de minimização, o valor de z pode ser melhorado sempre que $z_j - c_j > 0$, para qualquer $j \in R$.

Parece claro que o resultado apresentado acima estabelece o critério utilizado pelo algoritmo *simplex* para mudança de base. Assim, num problema de maximização, a base atual (que gera o valor atual z_0 da função objetivo) só será substituída por uma outra base se, para alguma variável não-básica $j \in R$, o valor $z_j - c_j < 0$. Quando este for o caso, o segundo termo à direita da igualdade na expressão para z acima será positivo e o valor de z sofrerá um incremento, exatamente o que se deseja em um problema de maximização.

- **Restrições**:

(4-6) Compra diária de óleo 1-3 não deve exceder 5000 barris.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5000$$

(7) Produção/dia de gas não deve exceder 14000 barris.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 14000$$

(8) Mistura de óleos p/produzir gas 1 deve ter uma octanagem média de pelo menos 10 graus.

$$\frac{\text{Octan. total gas. 1}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ barris na mistura}} = \frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 10$$

Para linealizar essa inequação, multiplica-se os dois lados pelo denominador:

$$2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} \geq 0$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 53

Num problema de PL, o número de variáveis que compõem a base é limitado. Assim, sempre que na busca pelo ponto ótimo a base atual for substituída por outra, uma das variáveis básicas que compõem a base atual deverá dar lugar à variável não-básica para a qual $z_j - c_j < 0$. Se mais de uma variável não-básica atender ao requisito $z_j - c_j < 0$, seleciona-se aquela para a qual o módulo de $z_j - c_j$ seja maior.

Como a cada mudança de base uma variável não-básica assume o lugar de uma variável básica na base, é necessário adotar-se um critério para retirada de variáveis da base. Tal critério compõe o 2º resultado do algoritmo *simplex*, sendo ilustrado utilizando o exemplo na página 38.

Relembrando a descrição do problema:

$$\text{Max } x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 + f_1 = 4$$
$$x_2 + f_2 = 1$$
$$x_1, \; x_2 \geq 0$$

As bases possíveis para este problema são (x_1, x_2), (x_1, f_1), (x_1, f_2), (x_2, f_1), (x_2, f_2) e (f_1, f_2). Tente identificar os pontos correspondentes a essas bases na Figura 3.2. Quatro bases já haviam sido identificadas previamente, correspondendo aos pontos A $\rightarrow$ D da figura; essas são as bases *viáveis* do problema. Outras duas bases não-viáveis podem ser identificadas. Bases não-viáveis não são consideradas no algoritmo *simplex*, já que não satisfazem o conjunto de restrições que compõem o problema.

(9) Mistura de óleos p/produzir gas 2 deve ter uma octanagem média de pelo menos 8 graus.

$$4x_{12} - 2x_{22} \geq 0$$

(10) Mistura de óleos p/produzir gas 3 deve ter uma octanagem média de pelo menos 6 graus.

$$6x_{13} + 2x_{33} \geq 0$$

A restrição (10) é redundante e não precisa ser incluída no modelo.

Por quê?

Porque x_{13} e $x_{33} \geq 0$ por definição. Verifique a octanagem dos óleos crus para entender o porquê desta redundância.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 54

Suponha que uma primeira base é selecionada para dar início ao algoritmo. Independente das variáveis selecionadas para compor a primeira base, para determinar o seu valor e verificar a viabilidade da base selecionada, deve-se resolver o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Uma escolha razoável para a primeira base é dada por (f_1, f_2), o ponto de origem no espaço bidimensional (x_1, x_2). Particionando a matriz **A** do exemplo entre variáveis básicas e não-básicas e rearranjando, tal que variáveis básicas passam a ser as primeiras colunas de **A**, obtém-se:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{N}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc:cc} a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc:cc} f_1 & f_2 & x_1 & x_2 \end{array} \end{array}$$

Escolhendo as variáveis de folga como primeira base para o problema, a matriz **B** assume a conformação de uma matriz identidade. Como para resolver o sistema $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ será necessário obter a matriz inversa $\mathbf{B}^{-1}$, a base selecionada é bastante conveniente, já que se $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}$. Assim,

(11) Mistura de óleos p/produzir gas 1 deve ter um teor de enxofre menor ou igual a 1%.

$$-0.005x_{11} + 0.01x_{21} + 0.02x_{13} \leq 0$$

(12) Mistura de óleos p/produzir gas 2 deve ter um teor de enxofre menor ou igual a 2%.

$$-0.015x_{12} + 0.01x_{32} \leq 0$$

(13) Mistura de óleos p/produzir gas 3 deve ter um teor de enxofre menor ou igual a 1%.

$$-0.005x_{13} + 0.01x_{23} + 0.02x_{33} \leq 0$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores **x**, **c** e **b** obtidos do exemplo vêm dados abaixo:

$$\mathbf{x}^t = [\mathbf{x_B} \mid \mathbf{x_N}] = [f_1, \ f_2 \mid x_1, \ x_2]$$

$$\mathbf{c}^t = [\mathbf{c_B} \mid \mathbf{c_N}] = [0, 0 \mid 1, 3]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conforme descrito anteriormente, o vetor **c** contém os coeficientes associados a cada variável de decisão na função objetivo; estes foram rearranjados em coeficientes associados às variáveis básicas e não-básicas, respectivamente. O vetor **b** corresponde ao lado direito das restrições do problema.

Deseja-se testar se algumas das variáveis não-básicas deve entrar na base, de forma a melhorar o valor z da função objetivo. O problema exemplo é de Maximização, logo somente variáveis não-básicas para as quais $z_j - c_j < 0$ serão candidatas a entrar na base. O conjunto R de variáveis não básicas contém duas variáveis, $j = 1$ (x_1) e $j = 2$ (x_2). O teste é realizado utilizando o formulário que precede o 1º resultado:

FORMULAÇÕES MULTIPERÍODO (Formulação 5)
O problema do estoque - O caso da empresa Regata

A Regata S/A quer decidir quantos barcos produzir nos próximos 4 trimestres, de modo a satisfazer sua demanda a um menor custo:

	Trim. 1	Trim. 2	Trim. 3	Trim. 4
Demanda	40	60	75	25

Para j = 1:

$$(z_1 - c_1) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 - c_1 = [0,\ 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} - 1 = -1$$

Para j = 2:

$$(z_2 - c_2) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2 = [0,\ 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} - 3 = -3$$

Introduzindo qualquer das duas variáveis não-básicas na base, observaria-se uma melhoria no valor z da função objetivo. Todavia, x_2 deve entrar na base, já que apresenta o maior valor absoluto de z_j - c_j.

Uma das variáveis atualmente na base deve sair, para dar lugar a x_2. Para determinar qual variável sai da base, utiliza-se a equação (1); isto é:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in R} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j$$

A variável entrante é x_2 (j = 2). Assim, a equação (1) pode ser reescrita para conter as variáveis básicas e a variável entrante x_2:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j$$

FORMULAÇÕES MULTIPERÍODO **(Formulação 5)**
O problema do estoque - O caso da empresa Regata

A Regata deve atender seus pedidos em dia. No início do 1º trimestre, 10 barcos estão em estoque. No início de cada trimestre, a Regata deve decidir quantos barcos serão produzidos naquele trimestre. Barcos produzidos num trimestre podem ser usados para atender à pedidos naquele mesmo trimestre (pedidos são atendidos no final do trimestre).

A Regata por produzir até 40 barcos/trim, a um custo de $400/barco. Para aumentar a produção, pode usar horas-extra, a um custo de $450/barco.

Estocar um barco de um trim. para outro custa $20/barco.

Formule o problema tal que a demanda seja atendida à um mínimo custo.

Fazendo as devidas substituições, obtém-se:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

As variáveis que compõem a base atual são (f_1, f_2). Explicitando o vetor $\mathbf{x_B}$ e executando as multiplicações entre matrizes e vetores na expressão acima, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

Todas as variáveis do problema exemplo estão condicionadas a assumirem valores não-negativos. Analisando a equação acima, é fácil observar que x_2 não pode assumir valores maiores que 1 ou a variável básica f_2 assumiria valores negativos. Assim, o valor máximo de x_2 é 1 e, neste caso, f_2 assume o valor 0, saindo da base. Logo, x_2 entra na base e f_2 sai da base para dar lugar a x_2, já que não é permitido mais do que 2 variáveis na base. Além disso, sabe-se que x_2 entra na base com valor 1 e que f_1 permanece na base, mas com valor 2 (e não 4, como na base inicial).

- **Variáveis de decisão**:

A Regata deve determinar quantos barcos produzir usando mão-de-obra normal e horas-extra a cada trimestre:

x_t = barcos produzidos por m.o. normal durante trim. t.
y_t = barcos produzidos por horas-extra durante trim. t.

Variáveis de estoque também devem ser definidas:

i_t = barcos em estoque no final do trimestre t.

Assim:
Custo total = custo produção normal + custo produção hora-extra + custo estocagem
$= 400\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 450(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 20\,(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 58

A partir do exemplo, estabeleceu-se o critério de saída de variáveis da base. Tal critério está fundamentado no princípio de não-negatividade das variáveis de decisão de um problema de PL. O 2º resultado formaliza esse critério.

<u>2º resultado</u>:

A variável básica x_k que sai da base dando lugar a x_j é determinada pela seguinte expressão:

$$x_k = \underset{i}{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ij}}, onde\ y_{ij} > 0\right\}.$$

Os vetores $\bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{y}_j$ foram definidos na página 48. Os elementos que compõem esses vetores são identificados por $\bar{b}$ e y, sendo utilizados no resultado acima.

A operacionalização da expressão no 2º resultado é bastante simples. Considere o exemplo anterior, com os vetores $\bar{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{y}_2$ devidamente identificados:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{b}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_2} x_2$$

- **Função objetivo**:

$$\text{Min } z = 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 + 450y_3 + 450y_4 + 20i_1 + 20i_2 + 20i_3 + 20i_4$$

Estoque no final de cada trimestre:

$$i_t = i_{t\text{-}1} + (x_t + y_t) - d_t, \quad t = 1,\ldots,4$$

onde d_t = demanda no trimestre t.

Para satisfazer a demanda ao final de cada trimestre:

$$i_{t\text{-}1} + (x_t + y_t) \geq d_t$$

$$\text{ou } \; i_t = i_{t\text{-}1} + (x_t + y_t) - d_t \geq 0$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 59

A razão $\{b_i / y_{ij}\}$ é obtida dividindo os vetores:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Big/ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deseja-se determinar a menor razão; no caso, este valor é 1, correspondendo a f_2. Logo, f_2 deve sair da base dando lugar a x_2, a variável entrante. A mínima razão também aponta para o valor de entrada de x_2 na base: $x_2 = 1$.

No momento em que determina-se uma nova base para o problema de PL, completa-se uma iteração (ou *pivot*) do algoritmo *simplex*. Na sequência, atualiza-se a base e repete-se o procedimento apresentado acima. A nova base para o problema exemplo é dada abaixo, junto com os vetores necessários para realizar mais uma iteração do *simplex*:

$$\mathbf{B} = [f_1, x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^t = [0, 3] \qquad \mathbf{N} = [x_1, f_2]$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base inversa $\mathbf{B}^{-1}$ foi obtida através do método de Gauss-Jordan, no slide 96.

- **Restrições**:

(1-4) Produção normal em cada trimestre não deve exceder 40 barcos:

$$x_1 \leq 40$$
$$x_2 \leq 40$$
$$x_3 \leq 40$$
$$x_4 \leq 40$$

(5-8) Demanda deve ser satisfeita a cada trimestre:

$$i_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40 \qquad i_2 = i_1 + x_2 + y_2 - 60$$
$$i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75 \qquad i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25$$

Todas as variáveis são do tipo $\geq$ 0.

Antes de dar prosseguimento ao algoritmo, é interessante interpretar geometricamente os resultados obtidos até agora. A base inicial selecionada para o problema exemplo continha as variáveis de folga (f_1, f_2). Na figura 3.2, esta base corresponde ao ponto A. A partir daquele ponto, existem dois caminhos possíveis de movimento: na direção de B ou na direção de D. No ponto B, a base é constituída das variáveis (f_1, x_2); no ponto D, a base é constituída das variáveis (x_1, f_2). Analisando o ângulo formado entre o vetor **c** e os vetores OB e OD [onde O denota o ponto de origem (x_1, x_2) = (0,0)], é fácil constatar que o ângulo mais agudo (< 90º) é aquele entre **c** e OB. Essa é a direção de maior melhoria no valor *z* da função objetivo. Observe, todavia, que o ângulo entre **c** e OD também é agudo, caracterizando uma direção de melhoria no valor *z*. O algoritmo selecionou a melhor direção de movimento, introduzindo, assim, a variável x_2 na base e removendo f_2 para fora da base. A nova base contendo as variáveis (f_1, x_2) corresponde ao ponto B na Figura 3.2.

Dando sequência ao algoritmo *simplex*, testam-se as variáveis não-básicas em busca de uma direção de melhoria no valor *z* da função objetivo:

Para j = 1:

$$(z_1 - c_1) = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_1 - c_1 = [0,\ 3]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1$$

PRÁTICA 3: Modelos Financeiros com múltiplos períodos.

Uma empresa precisa definir sua estratégia financeira para os próximos três anos. No tempo t = 0, $100000 estão disponíveis para investimento. Planos A, B, C, D e E estão disponíveis. Investir $1 em cada um desses planos gera o fluxo de caixa abaixo:

	0	*1*	*2*	*3*
A	-1	0.5	1	0
B	0	-1	0.5	1
C	-1	1.2	0	0
D	-1	0	0	1.9
E	0	0	-1	1.5

No máximo $75000 podem ser investidos num mesmo plano. A empresa pode ganhar 8% de juros se investir no mercado financeiro ao invés dos planos. Lucros gerados em qualquer período podem ser imediatamente reinvestidos (no mesmo período). A empresa não pode tomar dinheiro emprestado.
Formule o problema tal que $ no último périodo seja máximo.

Para j = 4:

$$(z_4 - c_4) = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4 - c_4 = [0, 3]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 3$$

A única variável candidata a entrar na base é x_1. Para verificar qual variável deve sair da base, utiliza-se a equação 1:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 x_1$$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 \;\therefore\; x_1 = 2$$

A variável de folga f_1 deve sair da base. A variável x_1 entra na base com valor 2. A nova base é formada por (x_1, x_2). O mesmo resultado pode ser obtido utilizando-se a expressão no 2º Resultado. Analisando-se a Figura 3.2, identifica-se o movimento do ponto B para o ponto C no gráfico.

Atualizando-se a base, obtém-se as seguintes matrizes e vetores:

$$\mathbf{B} = [x_1, x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}_\mathbf{B}^t = [1, 3] \qquad \mathbf{N} = [f_1, \; f_2]$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilização do *What's Best* na solução de problemas de PL

- ***What's Best*** é um programa da família ***Lindo*** para otimização linear, não-linear e inteira.
- ***Vantagens***:
  - implementado na planilha *Excel*; várias funções algébricas do *Excel* são aceitas na formulação do problema:
    - ABS, ACOS, AND, ASIN, ATAN, ATAN2, AVERAGE, COS, EXP, FALSE, IF, INT, LN, LOG, MAX, MIN, MOD, NOT, NPV, OR, PI, SIN, SQRT, SUM, SUMPRODUCT, TAN, TRUE, TRUNC, NORMINV, TRIAINV, EXPOINV, UNIFINV, MULTINV.

Na sequência, testam-se as variáveis não-básicas em busca de uma direção de melhoria no valor z da função objetivo.

Para j = 3:

$$(z_3 - c_3) = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 - c_3 = [1,\ 3]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

Para j = 4:

$$(z_4 - c_4) = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4 - c_4 = [1,\ 3]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

Nenhuma variável não-básica apresenta valor de $z_j - c_j < 0$. Assim, a base atual (x_1, x_2) é ótima e o algoritmo *simplex* é terminado. Geometricamente, é possível identificar o ponto C como ponto ótima na Figura 3.2. Avançando na direção do vetor **c**, o ponto C é o ponto de máximo avanço antes de abandonar-se o espaço de soluções viáveis. O algoritmo *simplex* pode ser compreendido como uma alternativa algébrica para o procedimento de solução gráfica. Tal recurso algébrico torna-se particularmente útil em problemas de maior dimensão (tridimensionais, quadridimensionais, etc.).

Outras vantagens do *What's Best*

- Programa permite **alterar** coeficientes da formulação **facilmente:** formulação fica explicita na planilha.
- **Facilidade de uso**: princípio de programação é o mesmo do Excel.
- **Gratuito** para *download* da rede:

www.lindo.com
Opção: What's Best

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 63

3.1. O *tableau* do *simplex*

Problemas de PL podem ser arranjados em uma tabela, conhecida como o *tableau* do *simplex*. O tableau contém todas as fórmulas utilizadas no algoritmo, apresentadas na seção anterior. A grande vantagem da utilização do tableau está na operacionalização do algoritmo *simplex*: o tableau facilita a álgebra necessária para completar as iterações do algoritmo, levando mais rapidamente a uma solução ótima.

O formato padrão do tableau do *simplex* vem apresentado abaixo:

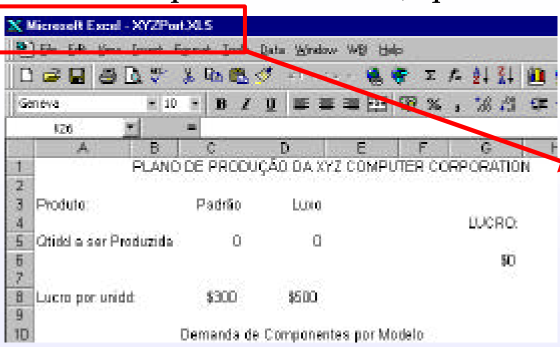
z	$z_j - c_j$	$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{t}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}$	$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Figura 3.3 - Tableau do *simplex*.

O algoritmo *simplex* é, via de regra, inicializado utilizando variáveis de folga como base inicial. Quando variáveis de folga não encontram-se disponíveis, variáveis de folga *artificiais* são utilizadas, conforme apresentado mais adiante.

Como utilizar o programa

- Abra o *Excel*. O *What's Best* deve carregar-se como uma **Macro** daquela planilha.
- Abra o arquivo *XYZPort*, que contém o exemplo.



Este é o arquivo.

Sempre que as variáveis de folga formarem a primeira base em um problema de PL, a montagem do tableau do *simplex* é extremamente facilitada. Considere o exemplo na página 38.

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Max} & x_1 + 3x_2 & & \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 + f_1 & = & 4 \\
& \quad\quad x_2 \quad + f_2 & = & 1 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

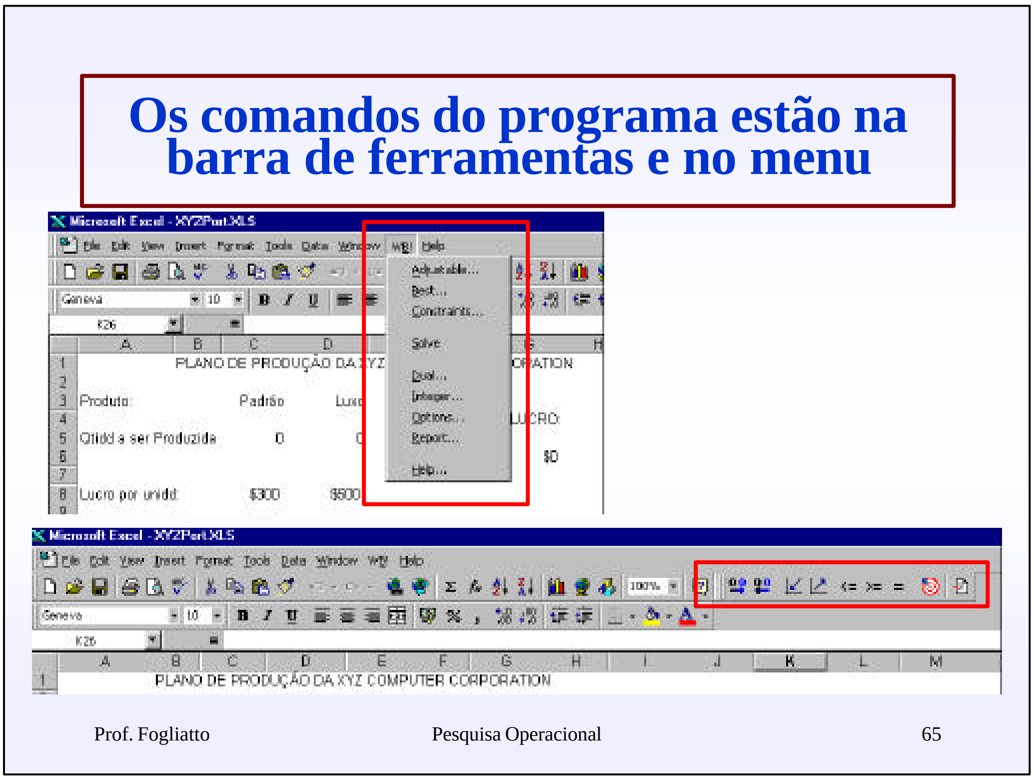
As variáveis de folga (f_1, f_2) formam a primeira base. Como as variáveis de folga não participam orginalmente da função objetico, seus coeficientes de custo c_j serão sempre 0 e o primeiro vetor $\mathbf{c_B}$ utilizado no algoritmo *simplex* será um vetor de zeros. Desta forma, a quantidade z_j - c_j dada pela expressão:

$$(z_j - c_j) = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$$

se reduzirá a:

$$(z_j - c_j) = -c_j$$

Para compor o primeiro tableau do *simplex*, quando variáveis de folga constituem a primeira base, basta escrever o negativo dos coeficientes de custo das variáveis não-básicas na primeira linha do tableau. As variáveis básicas recebem valor 0, por definição. Como z_j - c_j representa a potencial



melhoria no valor z da função objetivo representada pela $j^{\text{ésima}}$ variável, variáveis atualmente básicas devem receber valor igual a 0 simplesmente por já se encontrarem na base. Assim, para os dados do exemplo, a primeira linha do tableau é dada por:

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	z_0

Observe que, por conveniência, as variáveis que compõem o problema de PL vêm devidamente identificadas no tableau. A sigla RHS à direita das variáveis denota *right hand side* e contém o valor atual de z (denominado z_0) e o valor assumido pelas variáveis atualmente na base.

O valor atual de z, z_0, é dado pela equação:

$$z_0 = \mathbf{c}_\mathbf{B}^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Como $\mathbf{c_B}$ é um vetor de zeros, $z_0 = 0$ sempre que as variáveis de folga formarem a primeira base. Atualizando o tableau, tem-se:

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	0

O Problema do Mix de Produção

- A XYZ Corporation monta dois modelos de computador.
- O modelo Padrão gera um lucro por unidade produzida de \$300, enquanto o modelo Luxo gera um lucro por unidade de \$500.
- Os dois modelos utilizam três componentes para sua montagem: o chassis Padrão (60), o chassis de Luxo (50) e o drive de disquete (120).

Disponíveis em estoque

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 66

Na sequência, deseja-se escrever as linhas que compõem as restrições no tableau. Elas vêm dadas por:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$$

Para cada variável do problema, determina-se uma coluna $\mathbf{y}_j$. Sempre que as variáveis de folga formarem a primeira base, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Assim, a expressão acima reduz-se a:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{I}\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j$$

e as linhas que compõem as restrições no tableau são copiadas diretamente do problema de PL em estudo. Utilizando os dados do exemplo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} & \boxed{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + f_1 \\ \quad\quad\; x_2 \quad\quad + f_2 \end{array}} \begin{array}{l} = 4 \\ = 1 \end{array} \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	0
f_1	1	2	1	0	
f_2	0	1	0	1	

Necessidades de componentes em cada modelo

- O modelo Padrão utiliza um chassis Padrão e um drive de disquete.
- O modelo Luxo utiliza um chassis Luxo e dois drives de disquete.
- ***Problema***: qual combinação de modelos Padrão e Luxo maximiza os lucros da XYZ, considerando os componentes atualmente em estoque?

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 67

As variáveis atualmente na base são identificadas à esquerda do tableau (f_1 e f_2).

O único elemento faltante no tableau do exemplo corresponde à fórmula:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

no lado direito do tableau. Mais uma vez, quando as variáveis de folga formam a primeira base, $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ e a expressão acima reduz-se a:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Desta forma, para completar o tableau, basta escrever os valores do lado direito das restrições do problema para o lado direito do tableau. Isto é:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Max} & x_1 & + \; 3x_2 & & & \\
\text{s.a} & x_1 & + \; 2x_2 & + \; f_1 & & = \boxed{4} \\
 & & x_2 & & + \; f_2 & = \boxed{1} \\
 & x_1, & x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	0
f_1	1	2	1	0	4
f_2	0	1	0	1	1

❶ Determinar as variáveis de decisão (*adjustable cells*)

- ***Variáveis de decisão:***
  - ***Padrão*** = quantidd de computadores padrão a serem produzidos.
  - ***Luxo*** = quantidd de computadores luxo a serem produzidos.

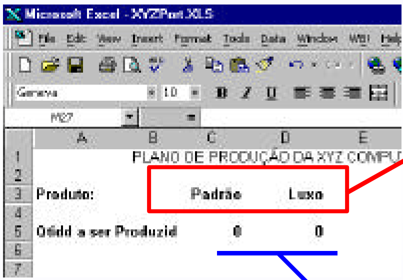
Prof. Fogliatto — Pesquisa Operacional — 68

Uma vez preenchido o tableau inicial do *simplex*, as iterações seguem a seguinte sequência de passos (equivalente à utilização das expressões matemáticas apresentadas na seção anterior):

a. Identifique as variáveis candidatas a entrar na base na primeira linha (linha *z* ou linha *zero*) do tableau. Se o problema for de maximização, a variável mais negativa entra na base; se o problema for de maximização, a variável mais positiva entra na base. Sempre que houver empate (duas variáveis candidatas com o mesmo valor de z_j - c_j, escolha aleatoriamente a variável a ser introduzida na base). A variável entrante na base será designada por x_j. No caso em que nenhuma variável satisfizer o critério de entrada na base, uma solução ótima foi encontrada para o problema.

b. Inspecione a coluna $\mathbf{y}_j$ correspondente à variável x_j em busca de valores positivos. Se não houver nenhum valor positivo na coluna, a solução para o problema de PL tende ao infinito e uma solução ótima foi encontrada. Caso contrário, o teste da mínima razão identificará a variável básica que deve dar lugar a x_j na base.

❶ Determinar as variáveis de decisão (*adjustable cells*)



Identificação das variáveis de decisão

Valor inicial das variáveis de decisão (pode ser qualquer valor).
Na busca pelo ótimo, o programa permitirá que essas células assumam qualquer valor não-negativo.

c. Para realizar o teste da mínima razão, utilize a fórmula:

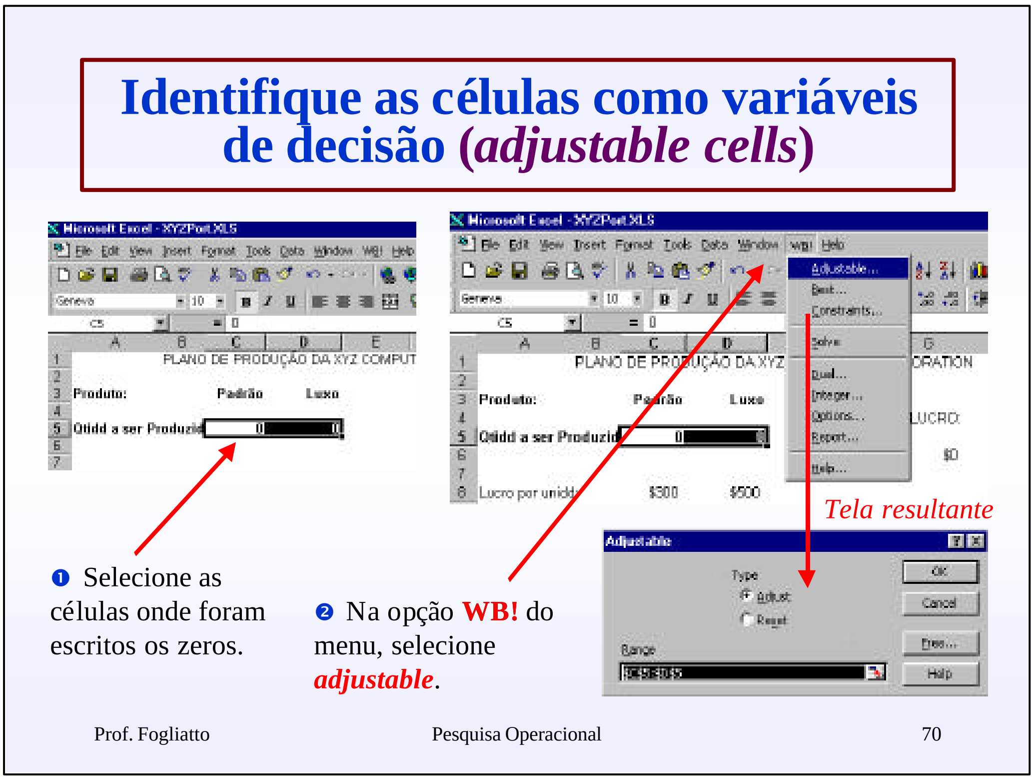
$$x_k = \underset{i}{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ij}}, onde \;\; y_{ij} > 0\right\}.$$

ou seja, divida o lado direito do tableau pelos valores positivos em $\mathbf{y}_j$: a menor razão identifica a variável x_k a sair da base. O valor positivo em $\mathbf{y}_j$ correspondente à mínima razão é o *elemento de pivot* da iteração.

d. Através de operações elementares com a linha que contém o elemento *pivot*, faça com que a coluna correspondente a x_j assuma os valores na coluna correspondente a x_k. As operações elementares com a linha *pivot* serão apresentadas através do exemplo a seguir.

e. Volte para o passo **a** e execute mais uma iteração do algoritmo.

Os passos acima são agora aplicados ao exemplo na página 38. O tableau inicial para o problema exemplo foi obtido anteriormente, sendo reproduzido a seguir.



	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	0
f_1	1	2	1	0	4
f_2	0	1	0	1	1

a. O problema exemplo é de maximização. Assim, variáveis com valores de z_j - c_j na linha z do tableau são candidatas a entrar na base. Duas variáveis, x_1 e x_2 satisfazem o critério de entrada na base. A mais negativa delas, x_2, entra na base. Assim, $x_j = x_2$ e $\mathbf{y}^t_j = \mathbf{y}^t_2 = [2, 1]$.

b. O vetor $\mathbf{y}_2$ apresenta dois valores positivos (2 e 1), com os quais será feito o teste da mínima razão.

c. O teste da mínima razão vem apresentado no tableau abaixo.

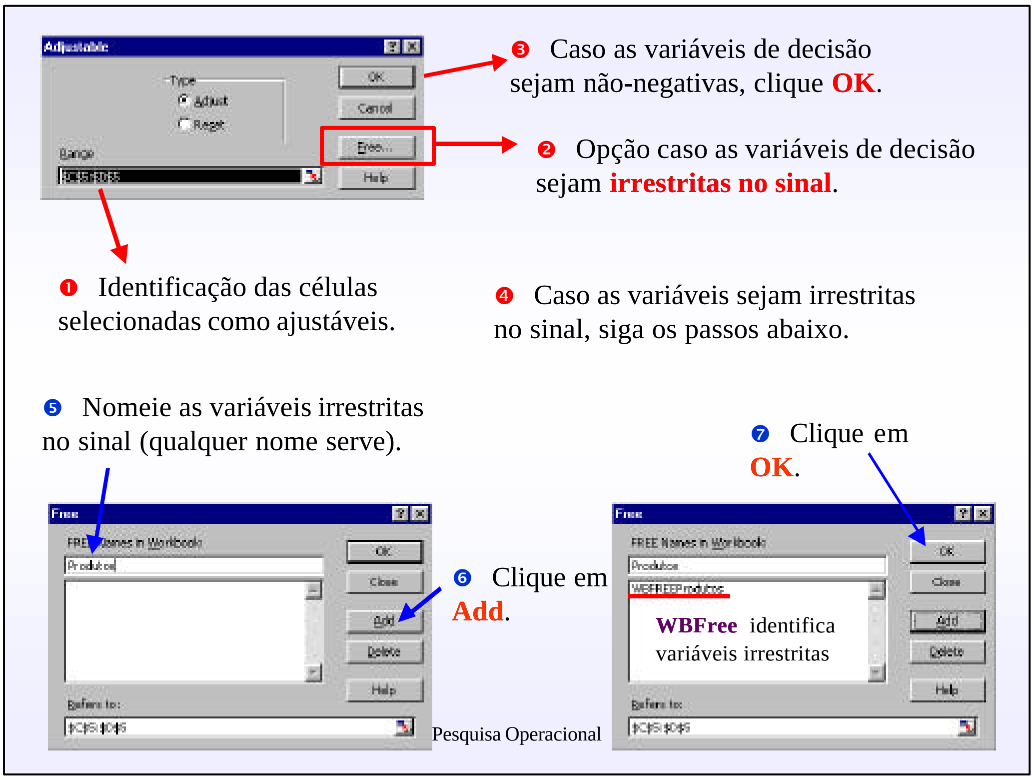
x_j

x_k

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS	
z	-1	-3	0	0	0	
f_1	1	2	1	0	4	4 / 2 = 2
f_2	0	1	0	1	1	1 / 1 = 1

elemento de pivot

mínima razão



d. Para completar a iteração do *simplex*, é necessário proceder com operações elementares que utilizam a linha que contém o elemento de *pivot*. As operações têm por objetivo fazer com que a coluna x_2 (da variável entrante) assuma a configuração da coluna f_2 (variável que sai da base). A sequência de operações vem descrita a seguir.

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	0
f_1	1	2	1	0	4
f_2	0	**1**	0	**1**	1

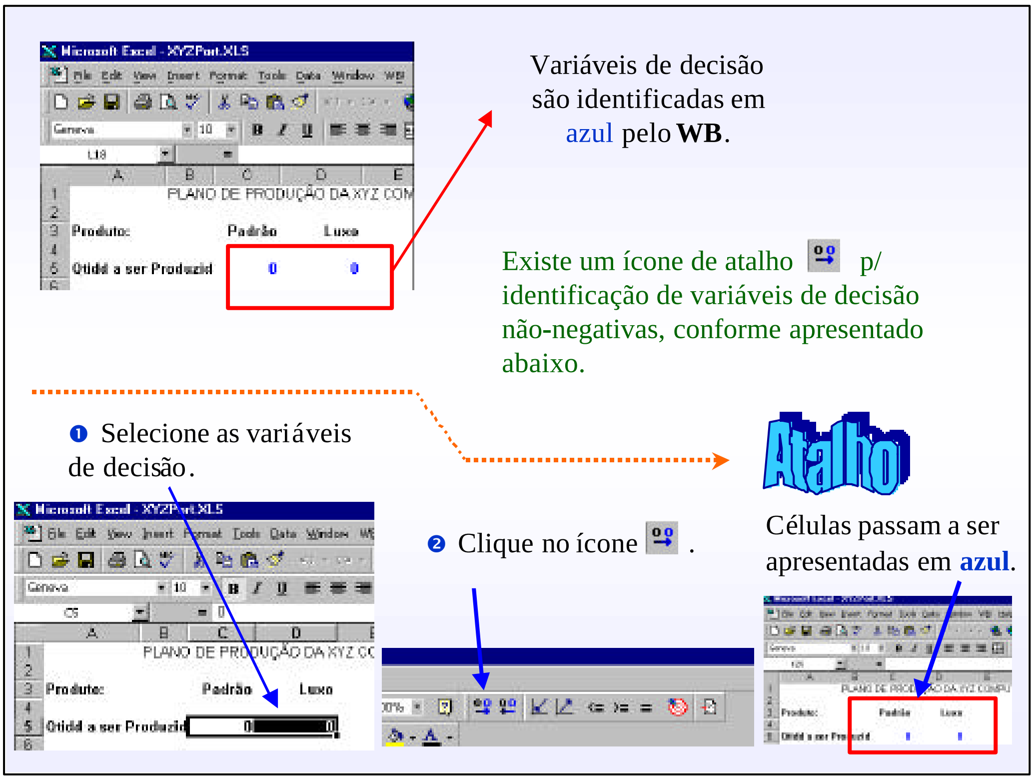
Os dois valores coincidem, logo nenhuma operação é necessária.

Identificação das linhas do tableau

		x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
(0)	z	-1	-3	0	0	0
(1)	f_1	1	**2**	1	**0**	4
(2)	f_2	0	1	0	1	1

Valores não coincidem: executa-se uma operação elementar. Seja (1)´ a linha (1) após a operação. A operação que transformará 2 em 0 é:

$$(1)' = (1) - 2 \times (2)$$



Explicitando a operação:

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	0
f_1	1	2	1	0	4
f_2	0	1	0	1	1

(1)' = (1) - 2 x (2)

⇩

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	-3	0	0	0
f_1	1	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	1	1

Na sequência, trabalham-se os valores na linha *z*:

		x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
(0)	z	-1	**-3**	0	**0**	0
(1)	f_1	1	0	1	-2	2
(2)	x_2	0	1	0	1	1

Valores não coincidem. Seja (0)´ a linha (0) após a operação elementar. A operação que transformará -3 em 0 é:

$$(0)' = (0) + 3 \times (2)$$

❷ Escreva a função objetivo (*best*)

- ***Função objetivo:***
  - ***Lucro Total*** =
    (*Lucro por unidade do Modelo Padrão*) $\times$
    (*Qtdd de Modelos Padrão produzidos*)
    $+$
    (*Lucro por unidade do Modelo Luxo*) $\times$
    (*Qtdd de Modelos Luxo produzidos*)
  - ***Lucro Total*** = $300 \times$ *Padrão* $+$ $500 \times$ *Luxo*

Explicitando a operação:

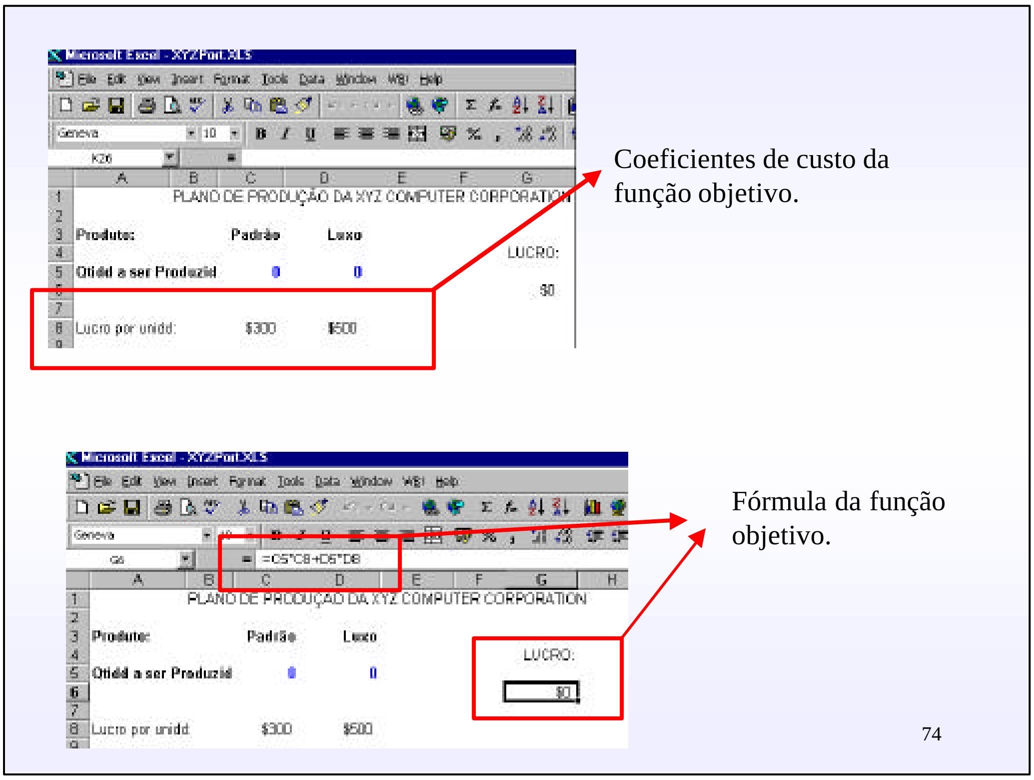
	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS	
z	-1	-3	0	0	0	(0)' = (0) + 3 x (2)
f_1	1	0	1	-2	2	
x_2	0	1	0	1	1	

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	0	0	3	3
f_1	1	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	1	1

Observe que a coluna x_2 assumiu a configuração anterior da coluna f_2. Isso foi obtido através de operações elementares com a linha que contém o elemento *pivot*. As operações elementares *sempre* devem utilizar a linha *pivot*, ocorrendo da forma exemplificada acima e generalizada a seguir (na expressão abaixo, w é um número real qualquer, positivo ou negativo):

$$\text{(linha nova)}' = \text{(linha antiga)} + [w \times \text{(linha } pivot)]$$

e. Concluída a iteração, retorna-se ao passo **a**. As demais iterações serão apresentadas diretamente no tableau.



2ª Iteração:

x_j

x_k

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	0	0	3	3
f_1	1	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	1	1

2 / 1 = 2

mínima razão

elemento de pivot

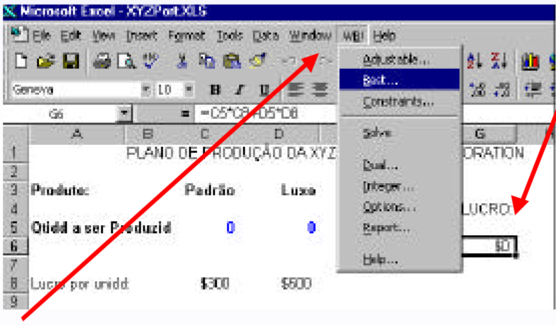
	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	0	0	3	3
f_1	**1**	0	**1**	-2	2
x_2	0	1	0	1	1

Nenhuma operação necessária

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	-1	0	0	3	3
f_1	1	0	1	-2	2
x_2	**0**	1	**0**	1	1

Nenhuma operação necessária

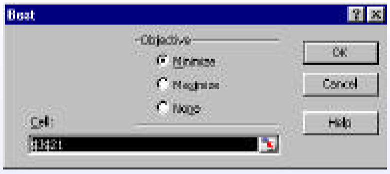
❷ Identifique a célula que contém a fórmula como função objetivo (*best*)



❶ Clique na célula onde a fórmula da função objetivo foi escrita.

❷ Selecione **WB!** no menu e a opção **Best**.

Este é a tela correspondente à opção **Best**.



Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 75

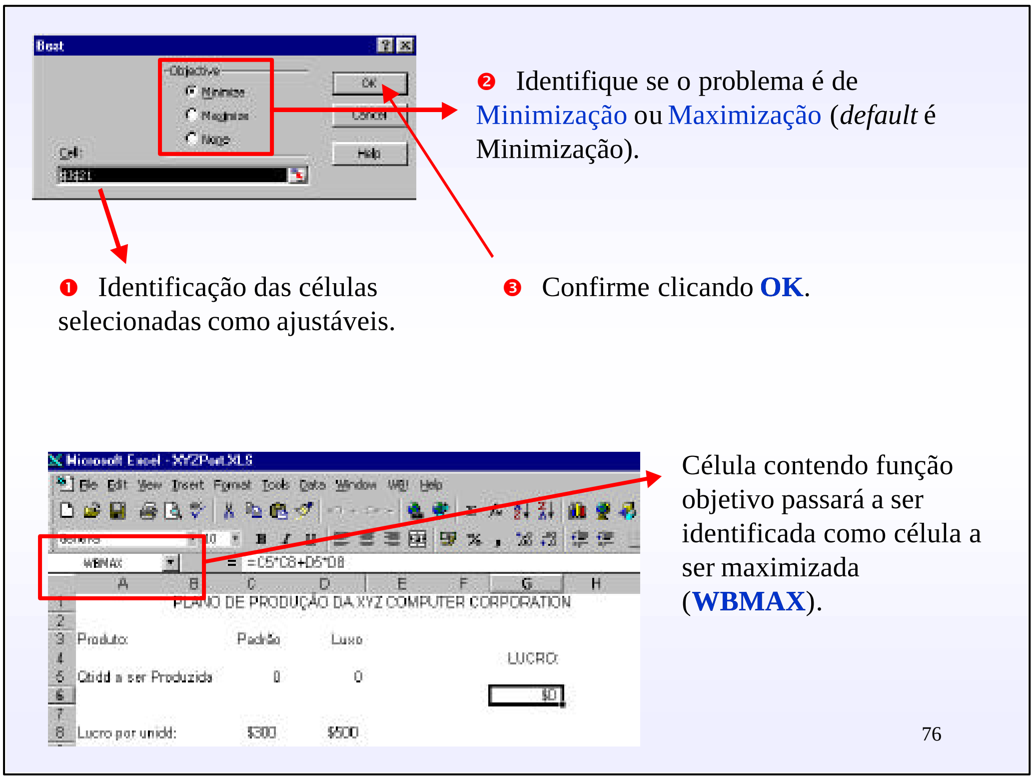
Finalizando a iteração:

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS	
z	**-1**	0	**0**	3	3	(0)' = (0) + (1)
f_1	1	0	1	-2	2	
x_2	0	1	0	1	1	

⇩

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	0	0	1	1	5
f_1	1	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	1	1

Observe que nenhuma variável não-básica apresenta valor negativo na linha z. Esse é o critério de finalização do algoritmo *simplex*.



3.1.1. Casos Especiais

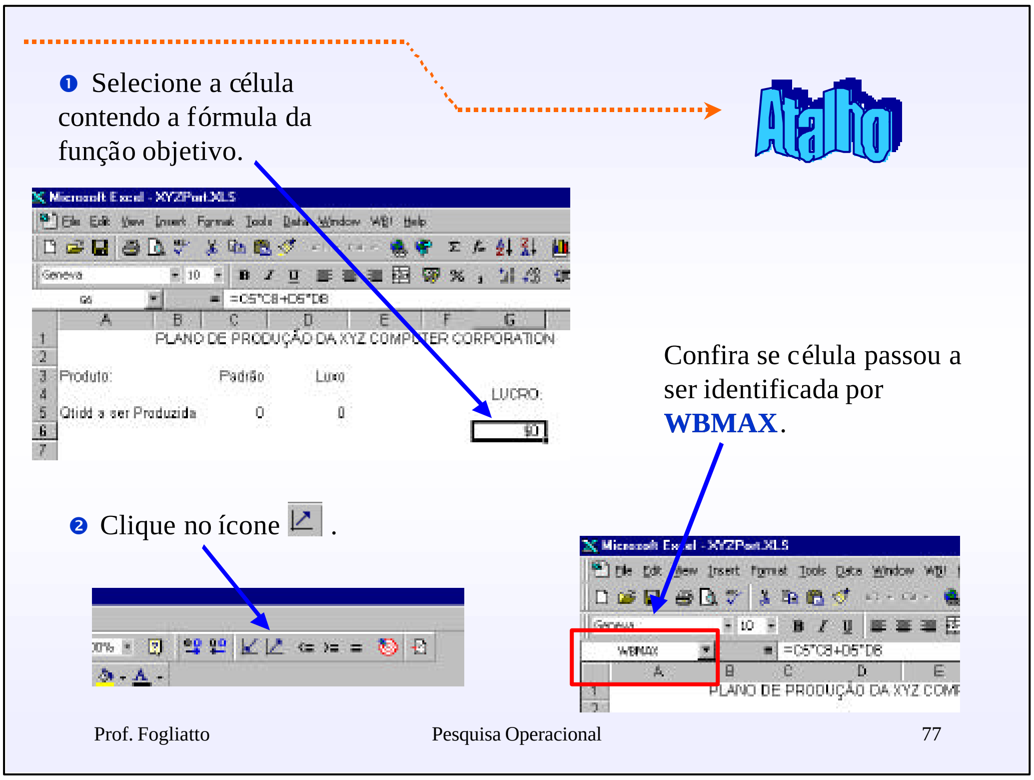
Dois casos especiais merecem nota: (*i*) problemas com soluções ótimas alternativas e (*ii*) problemas com solução ilimitada (tendendo ao infinito). Esses dois casos especiais podem ser identificados no tableau do *simplex*, conforme apresentado a seguir.

(*i*) Problemas com soluções ótimas alternativas

Considere um problema de minimização que, após um certo número de iterações, apresenta o seguinte tableau:

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	0	0	-2	0	-8
x_1	1	0	1/3	-2/3	2/3
x_2	0	1	1/3	1/3	5/3

Como todas as variáveis não-básicas são não-positivas (critério para entrada de variáveis na base em problemas de minimização), nenhuma variável deve entrar na base. Observe, todavia, que uma variável não-básica, f_2, apresenta valor 0 na linha z. Como os valores na linha z representam a melhoria na função objetivo decorrente da entrada de cada variável não-básica na base, isso significa que introduzindo f_2 na base não alteraria o valor z da função objetivo. Desta forma, pode-se acrescentar f_2 na base, obtendo-se uma base ótima alternativa, com o mesmo valor z de função objetivo (neste caso, x_2 daria lugar a f_2 na base).



Ao introduzir-se f_2 na base, x_2 passaria a apresentar um valor 0 na linha z. Assim, poderia-se indefinidamente substituir uma base por outra, sem com isso alterar o valor da função objetivo.

Geometricamente (em duas dimensões), a situação acima corresponderia ao caso em que o ponto ótimo no espaço de soluções viáveis não é um ponto, e sim uma *reta*. Assim, qualquer ponto sobre a reta resulta no mesmo valor z de função objetivo e inúmeras soluções ótimas alternativas são possíveis. O algoritmo *simplex* captura os pontos extremos da reta, apresentado-os como soluções ótimas alternativas para o problema.

(*ii*) Problemas com solução ilimitada (tendendo ao infinito).

Considere um problema de minimização que, após um certo número de iterações, apresenta o seguinte tableau:

	x_1	x_2	f_1	f_2	RHS
z	4	0	0	-3	-9
f_1	-1	0	1	2	10
x_2	-1	1	0	1	3

A variável não-básica x_1 deve entrar na base, já que z_1 - c_1 > 0 (trata-se de um problema de minimização). Porém, ao inspecionar-se a coluna $\mathbf{y}_1$ em busca de um elemento *pivot*, não é possível encontrar nenhum elemento não-negativo. Neste caso, uma solução ótima foi encontrada para o problema: esta solução

❸ Especifique as restrições (*constraints*)

- Restrições informam que total de componentes utilizados deve ser ≤ à quantidade disponível em estoque.
- Restrição p/ componente *chassis padrão*:

(*Qtdd de Modelos Padrão produzidos*) × (*Nº de chassis padrão por modelo*) +
(*Qtdd de Modelos Luxo produzidos*) × (*Nº de chassis padrão por modelo*)
≤ *Qtdd de chassis padrão em estoque*

Padrão × 1 + Luxo × 0 ≤ 60

tende ao infinito ($z \rightarrow \infty$). Esse resultado pode ser melhor compreendido aplicando-se a equação (1) aos dados do exemplo:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1$$

Quando x_1 entra na base, seu valor aumenta até o ponto em que uma das variáveis básicas tem seu valor reduzido a 0, saindo da base e dando lugar a x_1. No caso acima, nenhum valor não-negativa causa a saída de uma variável da base. Assim, x_1 pode aumentar de valor indefinidamente; o mesmo ocorre com o valor z da função objetivo. Nessas circunstâncias, parece evidente que a solução do problema tende ao infinito.

Demais restrições (*constraints*)

- Restrição p/ componente *chassis luxo*:

$$\text{Padrão} \times 0 \;+\; \text{Luxo} \times 1 \;\leq\; 50$$

- Restrição p/ componente *drive de disquete*:

$$\text{Padrão} \times 1 \;+\; \text{Luxo} \times 2 \;\leq\; 120$$

- Restrição de *não-negatividade*: é o *default* do WB.

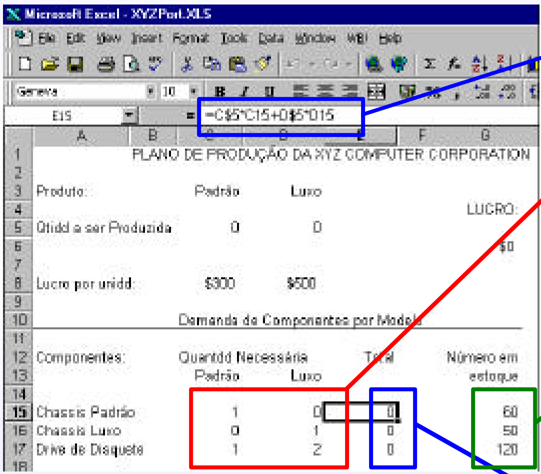
Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 79

3.1.2. Ausência de uma base inicial

Alguns problemas não possuem variáveis de folga em número suficiente para compor uma base inicial para o problema. Na prática, quaisquer variáveis podem compor a base inicial, mas é impossível saber se a base resultante será viável ou não, a menos que se resolva o sistema de equações que formam as restrições do problema. Na maioria das aplicações, testar combinações de variáveis em busca de uma primeira base viável pode tomar muito tempo. Assim, o procedimento padrão adotado nesses casos utiliza *variáveis de folga artificiais* (ou simplesmente variáveis artificiais) na busca de uma primeira base viável.

Ás variáveis artificiais, como o próprio nome indica, não pertencem ao problema. Tais variáveis somente são acrescidas para facilitar a determinação de uma primeira base viável, que dê partida ao algoritmo *simplex*. Assim, a partir do momento em que variáveis artificiais são utilizadas na composição da base inicial, deseja-se retirá-las da base, chegando, assim, a uma base viável legítima (isto é, pertencente ao problema). O procedimento para remoção das variáveis aritificiais da base inicial é conhecido como *Método do M-Grande*, sendo descrito a seguir através de um exemplo.

Organização das restrições na planilha do **WB**



Fórmula da 1ª restrição.

Coeficientes tecnológicos das restrições.

Lado direito das restrições.

Células c/ as fórmulas das restrições.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional

Considere o seguinte exemplo:

Min $z = x_1 - 2x_2$

s.a: $-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 4$

$x_1, \quad x_2 \geq 0$

Após acrescentar variáveis de excesso e folga, obtém-se o seguinte resultado:

Min $z = x_1 - 2x_2$

s.a: $x_1 + x_2 - e_1 = 1$

$x_2 + f_1 = 4$

$x_1, x_2, e_1, f_1 \geq 0$

Observe que somente uma variável de folga pode ser utilizada na composição da base inicial (variáveis de excesso não resultam em bases iniciais viáveis, não podendo ser utilizadas). Assim, para que seja possível uma base inicial formada exclusivamente por variáveis de folga, utiliza-se uma variável de folga *artificial*, acrescida à primeira restrição do problema. O resultado vem apresentado abaixo:

Restrições devem ser identificadas no WB

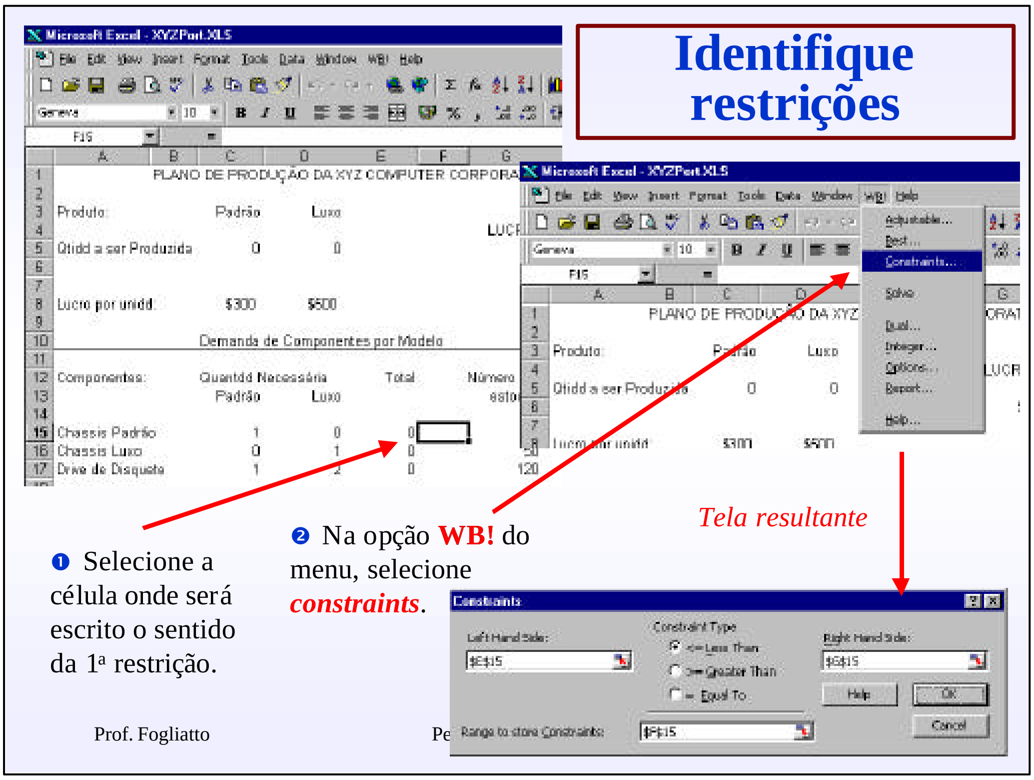
- Restrições podem ser de três tipos: ³, £, =.
- Ao escrever-se o sentido da restrição numa célula da planilha:
  - a célula adjacente à esquerda passa a ser identificada como aquela que contém a fórmula da restrição;
  - a célula adjacente à direita passa a ser identificada como aquela que contém a disponibilidade do recurso.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 81

$$
\begin{array}{llcl}
\textbf{Min } z = & x_1 - 2x_2 & + \mathrm{M}a_1 & \\
\textbf{s.a:} & x_1 + x_2 - e_1 & + a_1 & = 1 \\
& x_2 + f_1 & & = 4 \\
& x_1, x_2, e_1, f_1, a_1 & & \geq 0
\end{array}
$$

No método do *M-Grande*, cada vez que uma variável artificial é adicionada ao problema, ela também é adicionada na função objetivo, multiplicada por um coeficiente de custo *M*, onde *M* representa um número positivo maior do que qualquer outro que venha a ocorrer no problema. No caso de problemas de maximização, a variável artificial também é acrescida à função objetivo, mas multiplicada por um coeficiente de custo -*M*.

A lógica por trás do método do *M-Grande* é simples. Se num problema de Minimização uma das variáveis apresenta um coeficiente de custo positivo e muito grande, certamente será interessante manter tal variável fora da base, a nível zero. O mesmo ocorre em um problema de Maximização. Se uma das variáveis apresenta um coeficiente de custo negativo e muito grande, certamente será interessante manter tal variável fora da base, a nível zero. Assim, o método do *M-Grande* induz o algoritmo *simplex* a remover variáveis artificiais da base, já que elas não melhoram a função objetivo em quaisquer circunstâncias. No momento em que todas as variáveis artificiais são removidas da base, chega-se a uma base viável e legítima para o problema. A partir desse ponto, as variáveis artificiais podem passar a ser



desconsideradas do tableau.

O método do *M-Grande* será ilustrado através do exemplo acima.

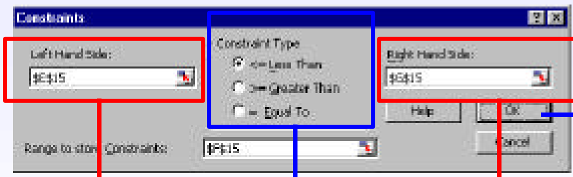
	x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
z	-1	2	0	0	-M	0
a_1	1	1	-1	0	1	1
f_1	0	1	0	1	0	4

Observe que no tableau acima, a_1 e f_1 compõem a base inicial (a variável de folga artificial vem designada por a_1). Como a_1 é básica, o valor z_5 - c_5 correspondente a esta variável na linha z do tableau deve ser zerado (atualmente, este valor é igual a –M). A primeira operação elementar realizada no tableau visa zerar o valor de z_5 - c_5.

		x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
(0)	z	-1	2	0	0	-M	0
(1)	a_1	1	1	-1	0	1	1
(2)	f_1	0	1	0	1	0	4

(0)' = (0) + M x (1)

		x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
(0)	z	-1 + M	2 + M	-M	0	0	M
(1)	a_1	1	1	-1	0	1	1
(2)	f_1	0	1	0	1	0	4



Confirme clicando **OK**.

❶ Identificação da célula que deve conter a fórmula da restrição.

❸ Identificação da célula que deve conter o lado direito da restrição.

❷ Identificação do tipo de restrição (*default* é £).

Uma vez corrigida a linha *z* do tableau, executam-se os passos do algoritmo *simplex* normalmente. Os passos vêm apresentados a seguir.

x_j

mínima razão

x_k

	x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
z	-1 + M	2 + M	-M	0	0	M
a_1	1	1	-1	0	1	1
f_1	0	1	0	1	0	4

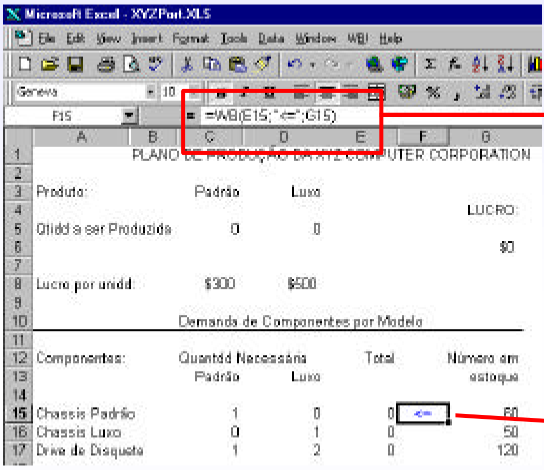
1 / 1 = 1

4 / 1 = 4

elemento de pivot

		x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
(0)	z	-1 + M	2 + M	-M	0	0	M
(1)	a_1	1	**1**	-1	0	**1**	1
(2)	f_1	0	1	0	1	0	4

Nenhuma operação



Identificação do tipo da restrição e células consideradas.

Identificação do tipo da restrição.

Repita o procedimento para as demais restrições.

		x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
(0)	z	-1 + M	**2 + M**	-M	0	**0**	M
(1)	a_1	1	1	-1	0	1	1
(2)	f_1	0	1	0	1	0	4

(0)' = (0) + (*-M-2*) x (1)

$\Downarrow$

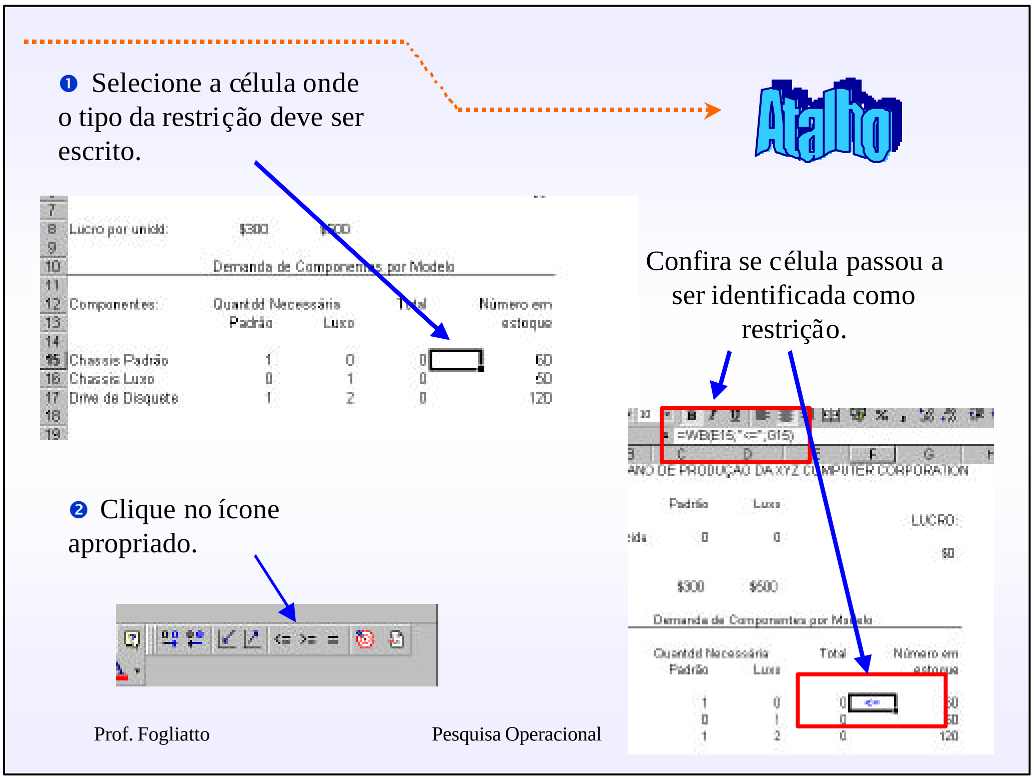
		x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
(0)	z	-3	0	2	0	-M-2	-2
(1)	a_1	1	1	-1	0	1	1
(2)	f_1	0	1	0	1	0	4

		x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
(0)	z	-3	0	2	0	-M-2	-2
(1)	a_1	1	1	-1	0	1	1
(2)	f_1	0	**1**	0	1	**0**	4

(2)' = (2) - (1)

$\Downarrow$

		x_1	x_2	e_1	f_1	a_1	RHS
(0)	z	-3	0	2	0	-M-2	-2
(1)	a_1	1	1	-1	0	1	1
(2)	f_1	-1	0	1	1	-1	3



Na primeira iteração, a variável artificial é removida da base. Para verificar se as operações elementares com as linhas do tableau foram executadas corretamente, verifique quais colunas contêm *M*s após o *pivot*. Uma vez removidas as variáveis artificiais da base, somente as colunas correspondentes a estas variáveis devem conter *M*s.

Nas demais iterações do *simplex*, a coluna $\mathbf{a}_1$ pode ser eliminada do tableau. A próxima iteração resulta em:

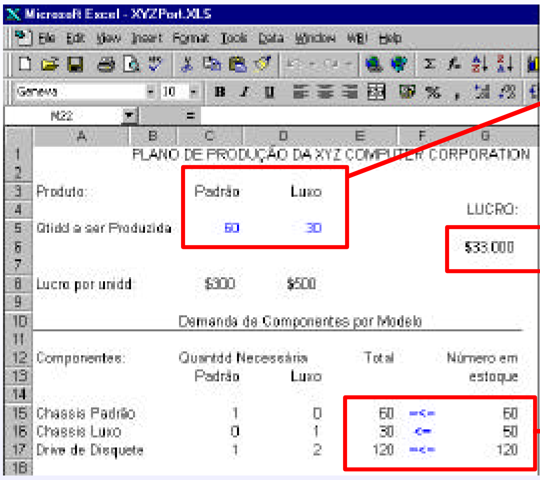
x_j

		x_1	x_2	e_1	f_1	RHS
(0)	z	-3	0	2	0	-2
(1)	a_1	1	1	-1	0	1
(2)	f_1	-1	0	1	1	3

x_k

elemento de pivot

Clique em para rodar a otimização



Valor das variáveis de decisão no ponto ótimo.

Valor da função objetivo no ponto ótimo.

Situação das restrições no ponto ótimo.

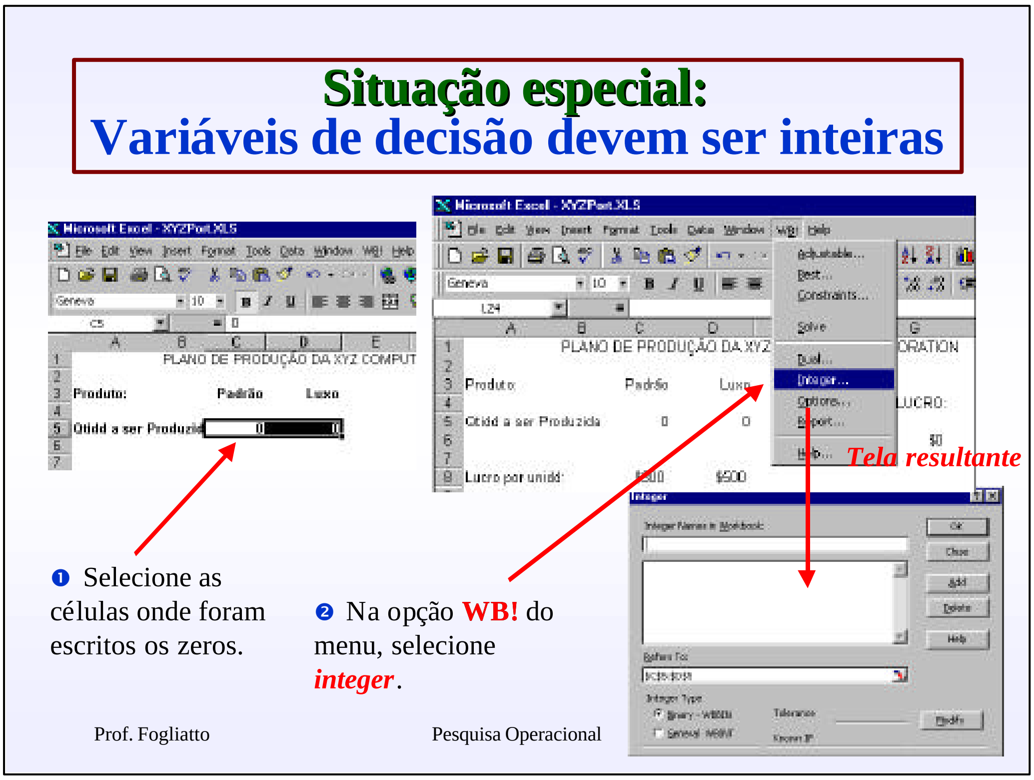
Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 86

Após iteração:

		x_1	x_2	e_1	f_1	RHS	
(0)	z	-3	0	2	0	-2	(0)' = (0) - 2 x (2)
(1)	a_1	1	1	-1	0	1	(1)' = (1) + (2)
(2)	f_1	-1	0	1	1	3	Nenhuma operação

		x_1	x_2	e_1	f_1	RHS
(0)	z	-1	0	0	-2	-8
(1)	a_1	0	1	0	1	4
(2)	f_1	-1	0	1	1	3

Este é o tableau ótimo. Observe que nas iterações finais do método, após remoção da variável artificial da base, a coluna correspondente à variável artificial deixou de ser utilizada no tableau do *simplex*.



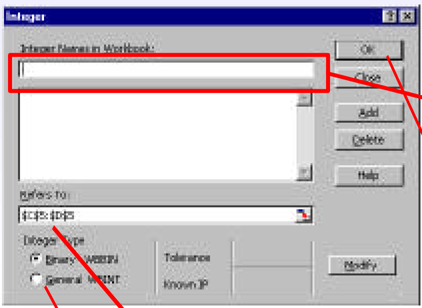
3.1.3. O algoritmo *simplex* em pacotes computacionais

Diversos pacotes computacionais executam o algoritmo *simplex*. Os mais conhecidos são da família *Lindo* (www.lindo.com). Além do próprio *Lindo*, disponível na maioria dos livros-texto de Pesquisa Operacional, o programa *What's Best*, implementado na planilha MSExcel, é bastante popular. A própria planilha Excel possui uma rotina de otimização linear, designada por *Solver* e disponível como *add-in* do programa. Todavia, o *Solver* não é tão "amigável" como o *What's Best*.

Na sequência, são apresentados dois tutorais para utilização dos pacotes *What's Best* e *Lindo* na solução de problemas de Programação Linear. Esses dois pacotes computacionais podem ser obtidos da Internet gratuitamente através do *site* www.lindo.com.

A. Tutorial do *What's Best*

O objetivo deste tutorial é introduzir o usuário ao *What's Best* (WB) através da solução de um problema usando a planinha Excel. O nome do problema em questão é "XYZ"; ele encontra-se descrito a seguir:



❷ Escolha um nome para as variáveis inteiras (qualquer nome serve).

❹ Clique em **OK** p/ confirmar.

❶ Identificação das células selecionadas como **ajustáveis** e **inteiras**.

❸ Identifique se variáveis de decisão são inteiras ***binárias*** (0 ou 1) ou qualquer número inteiro não-negativo (opção *General*). **Atenção:** default do programa é ***binário***

O problema de Produção XYZ

A XYZ Corporation monta dois modelos de computador. O modelo Padrão gera um lucro por unidade produzida de $300, enquanto o modelo Luxo gera um lucro por unidade de $500. Os dois modelos utilizam três componentes para sua montagem: o chassis Padrão, o chassis de Luxo e o drive de disquete. O modelo Padrão utiliza um chassis Padrão e um drive de disquete. O modelo Luxo utiliza um chassis Luxo e dois drives de disquete.

Problema: qual combinação de modelos Padrão e Luxo maximiza os lucros da XYZ, considerando os componentes atualmente em estoque?

O problema XYZ encontra-se no arquivo XYZ.xls. Vamos na sequência examinar suas características.

Outros programas de otimização

- **Solver do Excel**
  - ***Vantagem*:** suporta todas as funções matemáticas do Excel.
  - ***Desvantagem*:** "esconde" a formulação.
- **Lindo**
  - ***Vantagem*:** executa análise de sensibilidade e pode ser baixado gratuitamente da rede.
  - ***Desvantagem*:** formulação deve ser escrita como texto.

Tutorial do Lindo disponível na apostila

Prof. Fogliatto   Pesquisa Operacional   89

Examine o *layout* e a lógica do modelo. Teste várias projeções do tipo *What If?*. Por exemplo, tente ajustar a *Quantidade a ser Produzida* em ambas as células (C5 e D5) de modo a maximizar o *Lucro* (G6) sem que o *Total de Componentes* (E15:E17) exceda o *número de componentes em estoque* (G15:G17).

Por exemplo, um possível plano de produção consistiria em produzir o maior número possível de modelos Luxo (já que eles apresentam o maior retorno por unidade produzida). Então, com o que sobrar de componentes, produzir tantos modelos Padrão quantos forem possíveis. Este plano de produção usaria 50 chassis Luxo (E16), 20 chassis Padrão (E15), e todos os 120 drives de disquete (E17) em estoque. Este plano resultaria num lucro total de $31000 (G6). Esta solução, no entanto, pode ser melhorada utilizando o WB.

I. REVISÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

I.1. MATRIZES E VETORES

• Uma matriz é qualquer arranjo retangular de números.
• Uma matriz **A** com *m* linhas e *n* colunas é uma matriz *m* x *n*.
• *m* x *n* é a ordem de **A**.

Forma geral:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O número na $i^{ésima}$ linha e $j^{ésima}$ coluna da matriz é denominado a_{ij}.

Passos para utilização do What's Best

A. Determinar as *Adjustable Cells* (se você estiver lidando com um problema de programação inteira, vá direto para o item B).

Neste exemplo, desejamos determinar as quantidades a serem produzidas de ambos os modelos de computador (C5:D5). Para que o WB identifique essas células como numéricas, você deve digitar algum número nelas (zero, por exemplo). Na sequência, especifique que as células C5 e D5 são ajustáveis (*adjustable*) selecionando ambas as células e escolhendo a opção *Adjustable* no menu do WB (clique OK no *dialog box*). O WB vai apresentar as células ajustáveis em azul. O *default* do WB restringe as células ajustáveis a serem ≥ 0. Caso você deseje permitir que uma célula ajustável (correspondendo à uma variável de decisão do problema) assuma valores negativos, selecione a célula, escolha *Adjustable* no menu WB! e, em seguida, a opção *Free*. Verifique no *Refers to*: se a célula selecionada está correta e escreva um nome para aquela célula em *Free names in Workbook* (por exemplo, "livre"). Para concluir a operação, clique *Add* e *OK*. A partir deste ponto, o WB vai admitir valores negativos para a célula selecionada.

I.1 Matrizes e Vetores

- Uma matriz com uma única coluna é um ***vetor de coluna***.
- Uma matriz com uma única linha é um ***vetor de linha***.
- Vetores, por definição, são ***de coluna***; um vetor de linha é um vetor de coluna transposto.
- Um vetor de zeros é designado por **0**.

<u>Produto Escalar de Vetores</u>:

Sejam $\mathbf{u}' = [\, u_1,\ldots,u_n \,]$ um vetor (transposto) de linha e $\mathbf{v} = [\, v_1,\ldots,v_n \,]$ um vetor de coluna de igual dimensão. Seu produto escalar será o número:

$$\mathbf{u}' \,.\, \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 91

B. <u>Programação Inteira</u> (se o problema não for de programação inteira, vá direto para para o item C).

Algumas soluções para problemas de otimização só podem ser interpretadas se forem expressas em termos de números inteiros. Para que o WB! limite as soluções de um problema àquelas que resultarem em valores inteiros para as variáveis de decisão, você terá que programar as células ajustáveis para este fim. No exemplo XYZ, as células C5:D5 devem ser programadas para aceitar somente números inteiros. Marque essas células e selecione a opção *Integer* no menu WB! No box de diálogo, confira se as células marcadas são as desejadas (elas estão apresentadas abaixo do *Refers to*:). A seguir, escolha um nome para as células (por exemplo, “modelos”) e escreva em *Integer names in workbook*, clicando *Add* e *OK* para finalizar a operação.

I.1 Matrizes e Vetores

• O produto escalar:

$$\mathbf{v}'.\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

não é definido.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 92

C. <u>Determine o Objetivo (Best)</u>

O objetivo da XYZ é maximizar o lucro, o que pode ser expresso em termos matemáticos pela expressão:

Lucro Total = (Qtdd de Modelos Padrão produzidos) × (Lucro por unidade do Modelo Padrão) + (Qtdd de Modelos Luxo produzidos) × (Lucro por unidade do Modelo Luxo)

Esta fórmula aparece na célula G6 como =C5*C8+D5*D8. Para fazer com que a fórmula em G6 seja tratada como função objetivo pelo WB, mova o cursor para aquela célula é escolha *Best…* no menu WB!. A seguir, seleciona *Maximize* e clique OK.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Transposto de uma Matriz:

Seja uma matriz qualquer de ordem (m x n):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O transposto de **A**, designado por **A´**, será uma matriz de ordem (n x m):

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 93

D. Especifique as restrições (*constraints*)

As restrições do problema nos informam que o total de componentes utilizados (E15:E17) deve ser menor ou igual ao número em estoque (G15:G17).

A fórmula para o total de chassis Padrão utilizados é =C5*C15+D5*D15. As células E16 e E17 apresentam fórmulas similares para os componentes Chassis Luxo e Drives de Disquete.

Para especificar as restrições, marque com o cursor as células F15:F17, escolha *Constrain…* no menu do WB! E clique OK. Observe que o dialog box da opção *Contrain* apresenta E15:E17 como lado esquerdo da equação (*left hand side of the equation*), =G15:G17 como lado direito (*right hand side of the equation*), $F$15:$F$17 como a localização onde as restrições estão armazenadas na planilha, e <= *less than* (menor ou igual a) como tipo de restrição *default*.

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ = variáveis desconhecidas (*incógnitas*).
- a_{ij}, b_i = constantes

Solução para um sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas = conjunto de valores para $x_1, x_2, \dots, x_n$ que satisfaça as *m* equações do sistema.

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 94

Após estas três operações, o WB está pronto para resolver o problema XYZ. No menu do WB!, selecione a opção *Report* e marque os relatórios *Status Report* e *Solution Report.* Assim, após resolver o problema, o WB irá apresentar um relatório de solução, com todas as informações sobre a otimização. Para resolver o problema, escolha a opção *Solve* do menu do WB!. A janela de status do *solver* aparecerá. Logo a seguir, a planilha reaparecerá, com o maior valor possível de lucro indicado na célula indicada anteriormente. A solução dada pelo WB fornece o melhor lucro possível, considerando os recursos e restrições do problema. A solução também informa o número de quantidades de cada modelo a serem produzidas e o quanto de cada componente foi utilizado. O relatório de solução do problema encontra-se disponível numa *worksheet* auxiliar denominada *WB! Solution*.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Representação Matricial

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$(m \text{ x } n)$ $\qquad$ $(n \text{ x } 1)$ $\qquad$ $(m \text{ x } 1)$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Prof. Fogliatto $\qquad$ Pesquisa Operacional $\qquad$ 95

B. Tutorial do *Lindo*

Parte 1

Objetivo: demonstrar a utilização do software LINDO.

1.1. Iniciar o programa *Lindo*

No Windows 95, escolha a opção MSDOS. No prompt do DOS digite:

```
C:\> lindo
```

O prompt do Lindo aparece na forma de dois pontos “ : ”. O acesso a todos os comandos do programa é feito através desse prompt.

1.2. Liste os comandos do *Lindo*

O programa possui uma lista de seus comandos, a qual pode ser acessada digitando:

```
: com
```

INVERSO DE UMA MATRIZ

Definições:

❶ **A** é uma matriz (m x n). Se $m = n$, então **A** é uma matriz quadrada.

❷ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Os elementos diagonais de **A** são aqueles a_{ij} para os quais $i = j$.

❸ $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \text{matriz identidade } (\mathbf{I}_m)$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 96

1.3. Obtendo informação a respeito de um comando

Lindo oferece um breve sumário de cada comando. Para descobrir como utilizar algum comando, digite help seguido do nome do comando. O exemplo abaixo mostra como obter o sumário acerca do comando *edit.*

```
: help edit
```

1.4. Entrada de um problema no *Lindo*

Lindo possui um editor interno, o qual pode ser acionado da seguinte maneira:

```
: edit
```

Uma vez dado o comando, a tela do *Lindo* muda para o editor interno e você pode digitar o problema a ser resolvido. Digite o seguinte problema:

```
Max   3x1 + 2x2
st
acabamento)   2x1 + x2 < 100
carpintaria)   x1 + x2 < 80
demanda)   x1 < 40
```

O rótulo nas linhas do problema é opcional; eles ajudam a organizar o problema. Aperte na tecla *esc* para sair do editor.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN DE INVERSÃO DE MATRIZES

***Idéia Central*:**

Determine $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Procedimento:

Transformar **A** em **I** através de operações elementares com linhas.
As mesmas operações transformarão **I** em $\mathbf{A}^{-1}$.

1.5. Listando o problema

Para visualizar o problema digitado acima, use o comando “ look ”. O comando “ look all” lista o problema inteiro.

: look all

Para visualizar somente a restrição relativa à carpintaria, digite o número da linha correspondente ou o rótulo da restrição:

: look 3

ou

: look carpintaria

EXEMPLO 1: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right. \quad (1)' = \tfrac{1}{2}(1)$$

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & \tfrac{5}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right. \quad (2)' = (2) - (1)$$

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & \tfrac{5}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & 1 \end{array}\right. \quad (2)' = (2) \times (2)$$

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & \tfrac{5}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right. \quad (1)' = (1) - \tfrac{5}{2}(2)$$

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right.$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 98

1.6. Solucionando o problema

Para solucionar o problema, digite:

```
: go
```

O problema é resolvido e a solução é apresentada. A solução consiste de:

- O número de pivots (iterações) necessárias para encontrar a solução ótima.
- O valor ótimo da função objetivo.
- O valor das variáveis de decisão.
- O valor das variáveis de folga ou excesso.

Lindo então perguntará:

```
DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS?
?
```

Responda “y” para visualizar uma lista de valores para os coeficientes da função objetivo e das variáveis básicas para os quais a solução permanece inalterada. Responda “n” para ignorar.

EXEMPLO 2: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \quad (2)' = \tfrac{1}{2}(2)$$

$$\left.\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} \end{array} \quad (2)' = (2) - (1)$$

$$\left.\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & \tfrac{1}{2} \end{array}$$

$\to$ **B^{-1}** não existe! Note que a segunda linha é uma combinação linear da primeira.

1.7. Visualize a solução

Use o comando “solu”:

```
: solu
```

1.8. Salve a solução em um arquivo

Para salvar os resultados da otimização, use os comandos “dive”e “rvrt”:

```
: dive a:\mydata\giapetto.sol
: solu
: rvrt
```

A sequência de comandos acima salva a solução em um arquivo chamado giapetto.sol no drive *a*, no diretório \mydata.

Prática 4

Resolva o seguinte sistema de equações lineares usando a matriz inversa de **A**:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 &= 4 \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

A solução do sistema será dada por $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b}$

1.9. Salve o problema no formato *Lindo*

Lindo usa o seu próprio formato para salvar o problema. Para salvar um problema neste tipo de formato, digite:

```
: save a:\mydata\giapetto.lnd
```

1.10. Salve o problema no formato texto

Você também pode salvar o problema como texto. Para tanto, digite:

```
: dive a:\mydata\giapetto.lp
: look all
: rvrt
```

Considere o seguinte problema:

Um fabricante de móveis deseja determinar o mix ideal de produção, levando em conta preços-de-venda dos produtos e quantidade disponível de insumos.

A situação atual vem dada na tabela abaixo:

		Produto		*Qtidd de*
Insumo	Escrivaninha	Mesa	Cadeira	*Insumo*
Tábua	8	6	1	48
Acabamto	4	2	1.5	20
Carpintaria	2	1.5	0.5	8
Lucro Venda	$60	$30	$20	

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 101

1.11. Saindo do programa *Lindo*

Para encerrar a sessão do *Lindo* e retornar ao prompt do DOS, digite:

: quit

1.12. Imprimindo a solução

Para imprimir uma solução salva em arquivo, digite:

Print a:\mydata\giapetto.sol

Isso é feito fora do *Lindo*.

A formulação matemática deste problema é

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\textbf{Max } z = & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & & \\
\textbf{s.a:} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 48 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Restrição das Tábuas

Restrição de Acabamento

Restrição de Carpintaria

Nº escrivaninhas produzidas

Nº mesas produzidas

Nº cadeiras produzidas

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 102

Parte 2

Objetivo: apresentar alguns comandos adicionais do software LINDO.

2.1. Inicialize o programa *Lindo*

```
c:\> lindo
```

2.2. Abra um problema salvo em arquivo

No Tutorial 1, o problema foi gravado nos formatos *Lindo* e *texto*. Existem dois comandos diferentes para carregar o problema, conforme o formato usado para salvá-lo. Escolha um deles:

2.2.1. Carregue um problema gravado no formato *Lindo*

```
: retr a:\mydata\giapetto.lnd
```

2.2.2. Carregue um problema gravado no formato texto

```
: take a:\mydata\giapetto.lp
```

Com esses comandos, você carregou o problema na memória do *Lindo*.

Para resolver o problema pelo Simplex, temos que adicionar variáveis de folga

$$\textbf{Max } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\textbf{s.a:} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & f_1 & & & & & = & 48 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & & & + & f_2 & & & = & 20 \\
& 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & & & & & + & f_3 & = & 8 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & f_1, & & f_2, & & f_3 & \geq & 0
\end{array}$$

As variáveis de folga formarão a base inicial do método Simplex!

2.3. Revisualize o problema

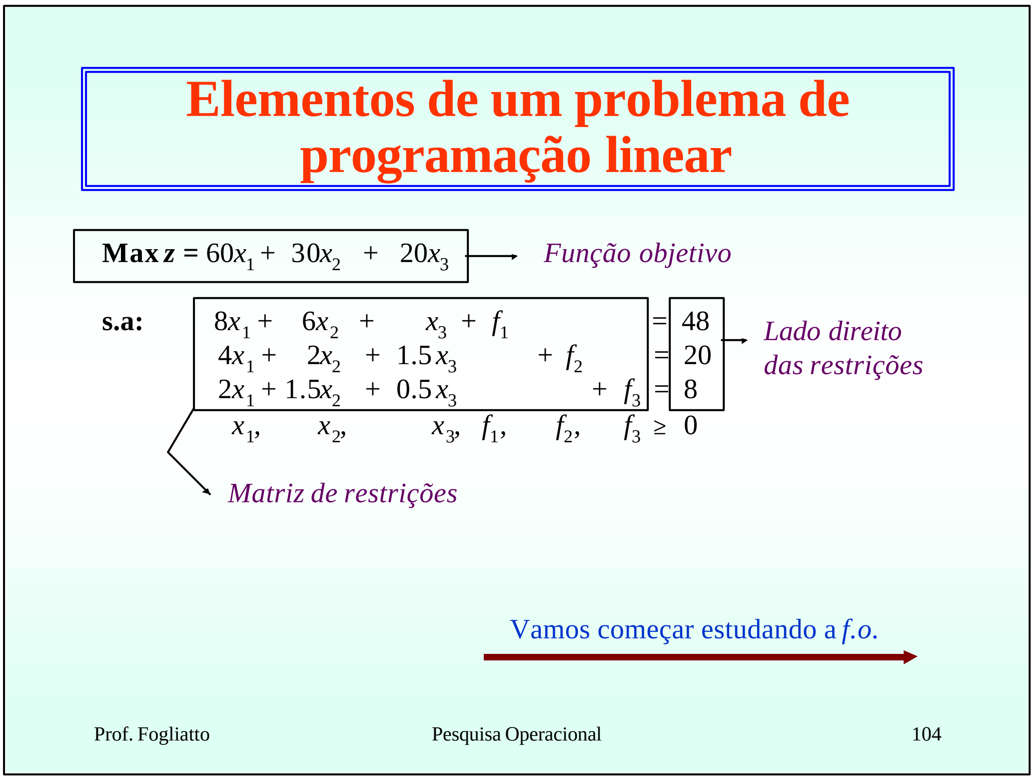
Revisualize o problema que você carregou usando o comando "look":

: look all

2.4. Execute somente uma iteração (pivot)

O comando "go" executa múltiplas iterações até chegar numa solução ótima (única, infinita ou inviável). Para executar um único pivot, use o comando "piv":

: piv



2.5. Apresente o tableau atual

Para visualizar o tableau após o pivot em 2.4, use o comando "tabl":

: tabl

2.6. Salvando o tableau atual

Para salvar o tableau atual, use os comandos "dive" e "rvrt":

: dive a:\mydata\giapetto.tab

: tabl

: rvrt

Elementos da Função Objetivo

$$\textbf{Max}\ \boldsymbol{z} = \underbrace{60x_1 + 30x_2 + 20x_3}$$

Valor z da função objetivo — Função objetivo

Antes de definir os elementos da função objetivo, vamos definir as variáveis que compõem o problema.

As variáveis do problema se dividem entre:

1. Variáveis básicas (que participam da base);
2. Variáveis não-básicas (que não estão na base).

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 105

2.7. Visualizando a solução atual

A solução atual ainda não é ótima, mas você deseja visualizá-la (valor da função objetivo, valores das variáveis de decisão, folga e excesso). Para tanto, use o comando "solu":

```
: solu
```

Lindo avisará o usuário de que a solução atual "pode não ser a ótima". Neste caso, a solução ótima pode aparecer nos próximos pivots.

2.8. Saindo do programa *Lindo*

```
: quit
```

Vamos representar o conjunto de variáveis básicas e não-básicas na forma de um vetor **x**

$$\mathbf{x}' = [\mathbf{x}_B | \mathbf{x}_{NB}]$$

Por exemplo, se f_1, f_2 e f_3 formarem a base, o vetor de variáveis seria:

$$\mathbf{x}' = [f_1, f_2, f_3 | x_1, x_2, x_3]$$

Os valores dessas variáveis, considerando as restrições do problema seriam:

$$\mathbf{x}' = [f_1, f_2, f_3 | x_1, x_2, x_3] = [48, 20, 8 | 0, 0, 0]$$

Prof. Fogliatto Pesquisa Operacional 106

2.9. Imprimindo o tableau atual

Para imprimir o tableau que você salvou no passo 2.6, digite:

```
Print a:\mydata\giapetto.tab
```

Elementos da Função Objetivo

Max $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

Os coeficientes (60, 30, 20) são chamados coeficientes de custo, sendo também representados como um vetor:

$$\mathbf{c}' = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6] = [\underset{x_1}{60}, \underset{x_2}{30}, \underset{x_3}{20}, \overset{f_1}{0}, \overset{f_2}{0}, \overset{f_3}{0}]$$

A cada variável do problema corresponde um coeficiente na função objetivo.

O vetor **c**´ também pode ser dividido em **c** ´ = [$\mathbf{c}_B$, $\mathbf{c}_{NB}$].

Representação Vetorial da Função Objetivo

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Max } z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

Elementos de um problema de programação linear

$$\boxed{\textbf{Max } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3}$$ → ***Função objetivo***

s.a:

$$\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} 8x_1 + 6x_2 + x_3 + f_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + f_2 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + f_3 \end{array}}
\begin{array}{c} = \\ = \\ = \end{array}
\boxed{\begin{array}{l} 48 \\ 20 \\ 8 \end{array}} \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3 \geq 0
\end{array}$$

→ ***Lado direito das restrições***

→ ***Matriz de restrições***

Como representar a matriz de restrições →

Matriz de restrições

Cada coluna da matrix de restrições corresponde a uma variável do problema.
Por exemplo...

$$\textbf{Max } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.a:

$$\boxed{\begin{array}{l} 8x_1 + 6x_2 + x_3 + f_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + f_2 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + f_3 \end{array}} \begin{array}{l} = 48 \\ = 20 \\ = 8 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3 \geq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de restrições

Dividiremos a matriz de restrições (**A**) entre as colunas correspondentes às variáveis básicas (**B**) e aquelas correspondentes às variáveis não-básicas (**B** ou **N**).

Ou seja:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} | \mathbf{N}]$$

No exemplo...

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} | \mathbf{N}] = [f_1, f_2, f_3 | x_1, x_2, x_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right]$$

Elementos de um problema de programação linear

$$\boxed{\textbf{Max } \mathbf{z} = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3} \longrightarrow \text{Função objetivo}$$

s.a:

$$\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{lllllll}
8x_1 + & 6x_2 + & x_3 + & f_1 & & \\
4x_1 + & 2x_2 + & 1.5x_3 & & + f_2 & \\
2x_1 + & 1.5x_2 + & 0.5x_3 & & & + f_3
\end{array}}
\begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array}
\boxed{\begin{array}{l} 48 \\ 20 \\ 8 \end{array}} \\
\quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3 \geq 0
\end{array}$$

Lado direito das restrições

Matriz de restrições

Finalmente, vejamos como representar o lado direito das restrições

Lado direito das restrições

Organizaremos esses valores num vetor, o qual chamaremos **b**.

Isto é:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

No exemplo:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Prática 5

Considere o problema abaixo:

$$\text{Min } z = 3x_1 - x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & 4x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 0 \\ & 3x_1 - x_3 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Transforme as inequações em equações introduzindo var. de folga e excesso. Identifique uma base inicial para o problema. Escreva a representação matricial de cada elemento do problema.

Agora que sabemos como representar todos os elementos de um problema de PL, podemos desenvolver fórmulas para determinar os elementos do tableau do Simplex

Através dessas fórmulas, realizaremos *análise de sensibilidade* em problemas de programação linear.

Elementos do tableau do Simplex

Identificando os elementos do tableau:

Nº indicando o potencial de melhoria na f.o. resultante da introdução de x_1 na base = z_1 - c_1.

		z	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	**RHS**
Linha 0 →	**z**	1	-60	-30	-20	0	0	0	0
Variáveis atualmente na base.	f_1	0	8	6	1	1	0	0	48
	f_2	0	4	2	$^3/_2$	0	1	0	20
	f_3	0	2	$^3/_2$	$^1/_2$	0	0	1	8

Valor atual da f.o. z

Valor atual das variáveis básicas, = $\overline{\mathbf{b}}$

Valor atual dos coeficientes de x_2 na matriz **A**, = vetor $\mathbf{y}_2$

Fórmulas que permitem determinar o valor dos elementos do tableau

- **D**eterminando os n^os^ (na linha 0 ou z do tableau) que indicam o potencial de melhoria na f.o. resultante da introdução de variáveis não-básicas na base.

Como chamaremos estes números:

$z_j - c_j$,   onde j é a variável não-básica em questão.

Note que:

- Se j corresponder a uma var. básica, $z_j - c_j = 0$ (a var. **já está na base**!).
- Se j corresponder a uma var. não-básica, $z_j - c_j$ pode assumir qualquer valor.

Valores de z_j - c_j para variáveis **não-básicas** (lembre que para as var. básicas, z_j - c_j = 0)

$z_j = \mathbf{c_B}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$

c_j = coeficiente de custo da variável j na função objetivo

Calculando o valor de z e o vetor $\overline{\mathbf{b}}$ no lado direito do tableau

$$\boxed{\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}$$

$$\boxed{z = \mathbf{c}'_B \overline{\mathbf{b}}}$$

Calculando as colunas $\mathbf{y}_j$ da matriz de restrições

Note que:

- Se j corresponde a uma vár. básica, a coluna $\mathbf{y}_j$ será uma das colunas da matriz identidade.

Exemplos:

Variáveis básicas		x_1	x_2	x_3
	x_2	0	1	0
	x_1	1	0	0
	x_3	0	0	1

Variáveis básicas		x_1	x_2	x_3
	x_3	0	0	1
	x_2	0	1	0
	x_1	1	0	0

Calculando as colunas $\mathbf{y}_j$ das variáveis não-básicas

$$\boxed{\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j}$$

Resumo das Fórmulas

	$z_j - c_j = \mathbf{c}_{\boldsymbol{B}}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}} - c_j$	$z = \mathbf{c}'_B\overline{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}$	$\mathbf{y}_{\boldsymbol{j}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}$	$\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Exemplo

Considere o problema do fabricante de móveis. Desejamos determinar o tableau do Simplex quando as variáveis básicas forem x_1, x_2 e x_3.

Max z = $60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

s.a:

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 6x_2 + x_3 + f_1 &= 48 \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + f_2 &= 20 \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + f_3 &= 8 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$\mathbf{c_B}' = [60, 30, 20]$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

Começaremos calculando $\mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Os elementos da *linha 0* do tableau serão:

Para $f_1 \Rightarrow$ $z_4 - c_4 = \mathbf{c_B}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a_4} - c_4 = [60 \quad 30 \quad 20] \cdot \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 5/2$

Para $f_2 \Rightarrow$ $z_5 - c_5 = \mathbf{c_B}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a_5} - c_5 = [60 \quad 30 \quad 20] \cdot \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 15$

Para $f_3 \Rightarrow$ $z_6 - c_6 = \mathbf{c_B}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a_6} - c_6 = [60 \quad 30 \quad 20] \cdot \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -10$

Os elementos do lado direito do tableau serão:

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -12 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$z = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}} = [60 \quad 30 \quad 20] \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ -12 \\ -16 \end{bmatrix} = 340$$

Os vetores **y** serão:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_6 = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/4 & -7/2 \\ -1/2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

O tableau do Simplex correspondente a esta base será:

	z	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	RHS
z	1	0	0	0	$^5/_2$	15	-10	340
x_1	0	1	0	0	$^5/_8$	$^3/_4$	$^{-7}/_2$	17
x_2	0	0	1	0	$^{-1}/_2$	-1	-4	-12
x_3	0	0	0	1	-1	0	4	-16

Note que esta não é uma base viável ($b < 0$)

Prática 6

Monte o tableau do Simplex para o exemplo anterior quando a base é formada pelas variáveis $\mathbf{B} = [x_1, f_2, f_3]$.

Esta é uma base viável?

ALGORITMO SIMPLEX

O método Simplex vai de uma base à outra base adjacente introduzindo uma var. não-básica na base no lugar de uma variável básica.

j = var. ñ-básica

O algoritmo otimiza a seguinte função:

$$Max\, z = z_0 - \sum_j (z_j - c_j)x_j, p/todo\, j.$$

Os critérios de entrada e saída da base são:

(1) *Entrada* - x_k entra se $z_k - c_k < 0$.

(2) *Saída* - x_{Br} sai se: $\frac{\bar{b}_r}{y_{r_k}} = \underset{1 \le i \le m}{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$

Fórmulas arranjadas no tableau:

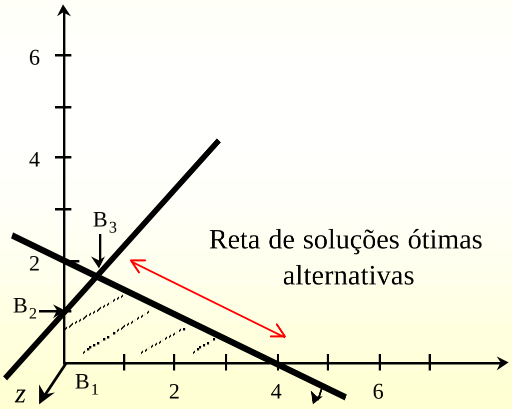
	$z_j - c_j = \mathbf{c}_B' \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$	$z = \mathbf{c}_B' \bar{\mathbf{b}}$
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$	$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

Situações especiais:

1. Soluções ótimas alternativas;
2. Solução infinita (tendendo ao infinito).
3. Base inicial não disponível (problema c/ variáveis de excesso ou restrições do tipo =).

Exemplo c/ soluções ótimas alternativas

$$\begin{array}{llrl}
\textbf{Min } z = & -2x_1 - 4x_2 & & \\
\textbf{s.a:} & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}$$



Tableau

Exemplo c/ solução tendendo ao infinito

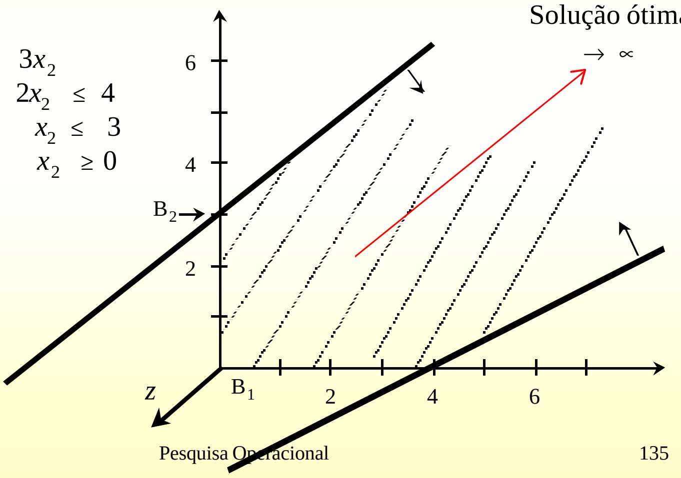
Min z = $-x_1 - 3x_2$

s.a:

$x_1 - 2x_2 \leq 4$

$-x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



Tableau

Ex. c/ base inicial não disponível

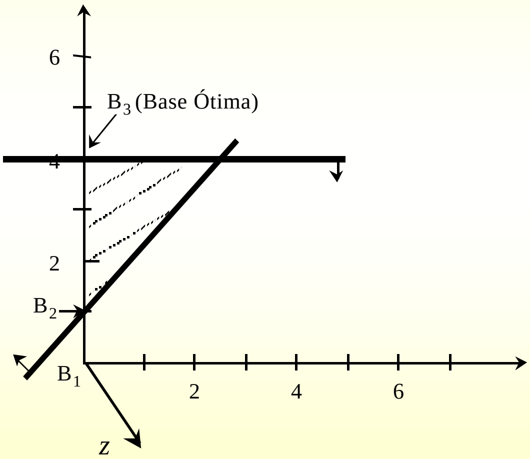
Min z = $x_1 - 2x_2$
s.a: $-x_1 + x_2 \geq 1$
$x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

Adicionando excesso e folga

Min z = $x_1 - 2x_2$
s.a: $x_1 + x_2 - e_1 = 1$
$x_2 + f_1 = 4$
$x_1, x_2, e_1, f_1 \geq 0$

Adicionando artificial

Min z = $x_1 - 2x_2 + Ma_1$
s.a: $x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 1$
$x_2 + f_1 = 4$
$x_1, x_2, e_1, f_1, a_1 \geq 0$



Tableau

Prática 7A
Solução ótima única

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\textbf{Max } \mathbf{z} = & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & & \\
\textbf{s.a:} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 48 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Prática 7B

Solução $\rightarrow \infty$

$$
\begin{array}{lrrrrcl}
\textbf{Max } \mathbf{z} = & 36x_1 + & 30x_2 & - \; 3x_3 & - \; 4x_4 & & \\
\textbf{s.a:} & x_1 + & x_2 & - \; x_3 & & \leq & 5 \\
 & 6x_1 + & 5x_2 & & - \; x_4 & \leq & 10 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Prática 7C
Soluções ótimas alternativas

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = -3x_1 + 6x_2 \\
&\text{s.a} \\
&\qquad 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\
&\qquad -x_1 + 2x_2 \le 2 \\
&\qquad x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Prática 7D
Base Inicial não-disponível

$$\text{Max } z = -x_1 - 2x_2$$

s.a

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

Prática 7E
Base Inicial não-disponível

$$\text{Min } z = -x_1 - x_2$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este problema não possui soluções viáveis (confira graficamente). Verifique como o método do M-Grande vai sinalizar a ausência de soluções viáveis.

Práticas Adicionais

① Max $z = 2x_1 + x_2 - x_3$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

② Min $z = 3x_1 - 3x_2 + x_3$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

③ Max $z = 2x_1 - x_2$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2, &\geq 0 \end{aligned}$$

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Estuda como alterações nos parâmetros do tableau ótimo de um problema de programação linear afetam a solução ótima.

Objetivo: verificar a faixa de variação nos parâmetros do tableau ótimo para a qual as variáveis da base ótima permanecem as mesmas.

A Análise de Sensibilidade é um dos tópicos mais importantes em Programação Linear

1. Permite analisar o efeito de alterações nos parâmetros de um problema sobre a solução ótima *sem resolver o problema novamente*.

Lembre que alguns problemas envolvem mais de 1000 variáveis e restrições, e implicam num tempo computacional grande para sua solução.

Importância da Análise de Sensibilidade

2. Permite determinar a faixa de variação permitida para os parâmetros do problema, o que possibilita sua análise econômica.

Por exemplo:

Numa carteira de investimentos, opta-se pelos planos A, B e C, com retornos \$3, \$2.5 e \$4 por real aplicado. Qual a faixa de variação permitida para o retorno do plano A tal que ele continue sendo selecionado para investimento?

Importância da Análise de Sensibilidade

3. Permite uma compreensão aprofundada do algoritmo Simplex.

Tópicos de Análise de Sensibilidade

Estudaremos o efeito das seguintes alterações em parâmetros de um problema de programação linear:

1. Mudança no coeficiente da função objetivo de uma variável não-básica;
2. Mudança no coeficiente da função objetivo de uma variável básica;
3. Mudança no lado direito de uma restrição;
4. Mudança na coluna de uma variável (a) não-básica e (b) básica;
5. Adição de uma nova variável ou atividade.

Problema-Exemplo:

		Produto		Qtidd de
Insumo	Escrivaninha	Mesa	Cadeira	*Insumo*
Tábua	8	6	1	48
Acabamto	4	2	1.5	20
Carpintaria	2	1.5	0.5	8
Lucro Venda	$60	$30	$20	

$$\textbf{Max } z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

s.a:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + x_3 + f_1 &= 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + f_2 &= 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + f_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

O tableau ótimo é:

	z	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	RHS
z	1	0	5	0	0	10	10	280
f_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2

$\mathbf{x}_B' = (f_1, x_3, x_1) = (24, 8, 2)$

$\mathbf{x}_N' = (x_2, f_2, f_3) = (0, 0, 0)$

$z = 280$

$\mathbf{c}_B' = (0, 20, 60)$

1. Mudança no coeficiente da função objetivo de uma variável não-básica

Suponha que o coeficiente de uma variável j seja alterado de c_j para $c_j + \Delta$.

A base ótima atual se modificará se $z_j - c_j < 0$ (o probl. é de Max).

Se este for o caso, a variável x_j deverá entrar na base.

Vejamos um exemplo...

No exemplo dos móveis, a única variável não-básica com coeficiente ≠ 0 na f.o. é x_2

Suponha que o coeficiente de x_2 seja alterado.

Deseja-se determinar para quais valores de c_2 a base ótima atual permanece inalterada.

$c_2 = 30$ ⟶ *coeficiente atual*

$c_2^* = 30 + \Delta$ ⟶ *novo coeficiente* (Δ pode ser qualquer nº)

Qual a faixa de valores que Δ pode assumir?

Para que a base atual permaneça ótima, $z_2 - c_2 > 0$

Utilizando a fórmula: $z_2 - c_2 = \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 - c_2$

Que pode ser reescrita como: $z_2 - c_2 = \mathbf{c}'_B \mathbf{y}_2 - c_2$, já que $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$

Assim, $$z_2 - c_2 = [0, \quad 20, \quad 60] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1.25 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 5 - \Delta > 0$$

Logo, $\Delta < 5$. Ou seja, para valores de $c_2 < 35$, a base atual permanece ótima.

Prática 8

Resolver o item (a) do exercício 1 da Lista de Exercícios *In Class*.

2. Mudança no coeficiente da função objetivo de uma variável básica

- O lado direito do tableau permanece inalterado, exceto pelo valor de z.
- Os valores de $z_j - c_j$ para todas as variáveis não básicas deve ser recalculado.
- Se $z_j - c_j < 0$ para qualquer j, a base ótima atual sofrerá alteração.

Vejamos um exemplo...

Vamos verificar para quais valores de c_1 no exemplo dos móveis, a base atual permanece ótima...

- O coeficiente atual da variável x_1 é $c_1 = 60$.
- O novo coeficiente será $c_1^* = 60 + \Delta$.
- Todas as variáveis não básicas são testadas:

$j = 2$:

$$z_2 - c_2 = \mathbf{c}'_B \mathbf{y}_2 - c_2 = [0,\ 20,\ 60 + \mathbf{D}] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1.25 \end{bmatrix} - 30 = 5 + \tfrac{5}{4}\mathbf{D} > 0$$

Testando variáveis não-básicas:

$j = 5$:

$$z_5 - c_5 = \mathbf{c}'_B \mathbf{y}_5 - c_5 = [0,\ 20,\ 60 + \mathbf{D}] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix} - 0 = 10 - \tfrac{1}{2}\mathbf{D} > 0$$

$j = 6$:

$$z_6 - c_6 = \mathbf{c}'_B \mathbf{y}_6 - c_6 = [0,\ 20,\ 60 + \mathbf{D}] \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 0 = 10 + \tfrac{3}{2}\mathbf{D} > 0$$

Agrupando as 3 inequações:

$$5 + {}^{5}/_{4}\Delta < 0$$
$$10 - {}^{1}/_{2}\Delta > 0$$
$$10 + {}^{3}/_{2}\Delta > 0$$

$\longrightarrow$ $-4 < \Delta < 20$

Concluindo...

Se c_1 variar no intervalo:

(56, 80)

a base atual permanecerá ótima.

Prática 9:

Resolva a parte (b) *do problema* 1 *da Lista de Exercícios In Class*

3. Mudança no lado direito de uma restrição

3a. Efeito na base atual

Alterações em **b** não afetam os valores de $z_j - c_j$; assim, a base atual permanecerá ótima, a menos que algum elemento de $\bar{\mathbf{b}}$ fique negativo.

No exemplo:

Suponha que b_2, atualmente em 20, seja modificado para $b_2^* = 20 + \Delta$.

A base atual permanecerá ótima se $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+2\Delta \\ 8+2\Delta \\ 2-1/2\,\Delta \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \longrightarrow -4 \leq \Delta \leq 4$$

3b. Efeito no valor de z

O novo valor de z no tableau será: $z^{*} = \mathbf{c}'_B \bar{\mathbf{b}}^{*}$

3c. Quando a base atual não é mais ótima

Neste caso, uma ou mais das variáveis básicas está na base a um nível negativo.

Estas variáveis devem ser retiradas da base.

Prática 10

Resolver o itens (c) e (d) do exercício 1 da Lista de Exercícios *In Class*.

4. Mudança na coluna de uma variável *(a)* não-básica

Suponha que troquemos a coluna $\mathbf{a_2}$, correspondente a x_2, para:

$$\begin{bmatrix} \underline{30} \\ 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{43} \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Ou seja, o lucro na produção de 1 unidade de x_2 aumenta de \$30 para \$43.
- Em contrapartida, experimentaremos modificações na tecnologia de produção de x_2.

Atualmente não produzimos x_2. Após as modificações, seria interessante produzir este produto?

EFEITO DE ALTERAÇÕES NUMA COLUNA DE UMA VARIÁVEL NÃO-BÁSICA

QUAIS ELEMENTOS SERIAM AFETADOS POR ESTA ALTERAÇÃO?

- A base ótima atual (**B**) não se altera, já que $\mathbf{a_2}$ não é uma de suas colunas.
- O lado direito do tableau também não se altera, já que **b** permanece o mesmo.

Examinando o tableau ótimo, constatamos que somente o valor de z_2 - c_2 é afetado pela alteração na coluna $\mathbf{a_2}$.

- Assim, se $z_2 - c_2 = \mathbf{c_B}'\mathbf{y_2} - c_2 > 0$, a base atual permanece ótima.
- Caso contrário, pivotearemos x_2 para dentro da base e encontraremos uma nova solução ótima para o problema.

Prática 11

Resolver o item (e) do exercício 1 da Lista de Exercícios *In Class*.

4. Mudança na coluna de uma variável *(b)* básica

- Neste caso, a base ótima **B**, o lado direito do tableau, bem como todos os z_j - c_j de todas as variáveis são alterados.

- O tableau atual permanecerá ótimo se:

  1. O lado direito do tableau (o vetor $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$) permanecer positivo;
  2. Todos os valores de $z_j - c_j$ permanecerem > 0.

- Se uma das duas condições não se verificar, uma nova base ótima deve ser encontrada.

5. Adição de uma nova variável ou atividade

- Originalmente, considerávamos a produção de três itens: x_1, x_2 e x_3.
- Suponha que desejamos verificar o efeito de adicionar x_4 no mix de produção.

Note que:

- Os valores de z_j - c_j permanecem inalterados, bem como os valores do lado direito do tableau (o vetor $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$).

Assim, tudo o que precisamos fazer é:

- Verificar se $z_4 - c_4 > 0$. Se este for o caso, a base ótima permanece a mesma.

Prática 12

Resolver o item (f) do exercício 1 da Lista de Exercícios *In Class.*

RESUMO

Alteração no problema original	*Efeito no tableau ótimo*	*Base atual permanece ótima se*
Alteração em coef. da f.o. de uma var. não-básica x_j	Muda o valor de $z_j - c_j$	$z_j - c_j > 0$
Alteração em coef. da f.o. de uma var. básica x_b	Todos os valores de $z_j - c_j$ podem sofrer alteração	Todos os valores de $z_j - c_j > 0$
Alteração no lado direito de uma restrição	Lado direito do tableau (vetor $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$)	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$
Alterando a coluna de uma var. não-bás. x_j ou adicionando uma nova var. x_k	Valor de z_j - c_j muda e tableau é acrescido de uma nova coluna	z_j - $c_j > 0$ z_k - $c_k > 0$

O PROBLEMA DUAL

- Todo o problema de programação linear possui um problema dual correspondente.
- Chamaremos o problema original de "***primal***" e o problema dual de "***dual***".

Primal	Dual
Max	Min
Min	Max

- Variáveis do problema primal $\rightarrow$ $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Variáveis do problema dual $\rightarrow$ $w, y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Escrevendo o *dual* de um problema de progr. linear

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z = {} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\textbf{s.a:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min } w = {} & b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\
\textbf{s.a:} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n
\end{aligned}
$$

EXEMPLO

$$\begin{array}{llllll} \textbf{Max } z = & 60x_1 + & 30x_2 & + 20x_3 & & \\ \textbf{s.a:} & 8x_1 + & 6x_2 & + \ 1x_3 & \leq & 48 \\ & 4x_1 + & 2x_2 & + 1.5x_3 & \leq & 20 \\ & 2x_1 + & 1.5x_2 & + 0.5x_3 & \leq & 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Primal

$$\begin{array}{llllll} \textbf{Min } w = & 48y_1 + & 20y_2 & + \ 8y_3 & & \\ \textbf{s.a:} & 8y_1 + & 4y_2 & + \ 2y_3 & \geq & 60 \\ & 6y_1 + & 2y_2 & + 1.5y_3 & \geq & 30 \\ & 1y_1 + & 1.5y_2 & + 0.5y_3 & \geq & 20 \\ & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Dual

A $i^{ésima}$ restrição do dual corresponde à $i^{ésima}$ variável do primal

Usando a tabela abaixo, pode-se achar o dual de qualquer primal:

	Min		Max	
Variáveis	≥ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$	*Restrições*
	≤ 0	$\leftrightarrow$	$\geq$	
	Irrestr.	$\leftrightarrow$	$=$	
Restrições	$\geq$	$\leftrightarrow$	≥ 0	*Variáveis*
	$\leq$	$\leftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\leftrightarrow$	Irrestr.	

OUTRO EXEMPLO

$$\begin{aligned}
\textbf{Max } z = {} & 2x_1 + x_2 \\
\textbf{s.a:}\quad & 2x_1 + x_2 = 2 \\
& 2x_1 - x_2 \geq 3 \\
& x_1 - x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ irrestr.}
\end{aligned}$$

P r i m a l

$$\begin{aligned}
\textbf{Min } w = {} & 2y_1 + 3y_2 + 1y_3 \\
\textbf{s.a:}\quad & 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
& y_1 - y_2 - y_3 = 1 \\
& y_1 \text{ irrestr.},\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

D u a l

INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DO PROBLEMA DUAL

O exemplo visto anteriormente:

$$\begin{aligned}
\textbf{Max } z = {} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\textbf{s.a: } & 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 \leq 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Corresponde à modelagem matemática do seguinte problema:

		Produto		*Qtidd de*
Insumo	Escrivaninha	Mesa	Cadeira	*Insumo*
Tábua	8	6	1	48
Acabamto	4	2	1.5	20
Carpintaria	2	1.5	0.5	8
Lucro Venda	$60	$30	$20	

O DUAL DESTE PROBLEMA É:

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{Min } w = & 48y_1 + & 20y_2 + & 8y_3 & & \\
\textbf{s.a:} & 8y_1 + & 4y_2 + & 2y_3 & \geq 60 & \rightarrow \text{Escrivaninha} \\
 & 6y_1 + & 2y_2 + & 1.5y_3 & \geq 30 & \rightarrow \text{Mesa} \\
 & 1y_1 + & 1.5y_2 + & 0.5y_3 & \geq 20 & \rightarrow \text{Cadeira} \\
 & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

- Restrições associadas com escrivaninhas, mesas e cadeiras, respectiv.
- y_1 associado com tábuas; y_2 com acabam^{to}; y_3 com carpintaria.

Suponha uma situação onde exista escassez de insumos. Um outro fabricante de móveis deseja comprar os insumos disponíveis na fábrica de escrivaninhas, mesas e cadeiras.

A pergunta-chave é: qual o ágio máximo a ser cobrado pelos insumos?

Definindo as variáveis do problema *dual*

- y_1 = ágio máximo cobrado por uma tábua de madeira;
- y_2 = ágio máximo cobrado por 1 hora de acabamento;
- y_3 = ágio máximo cobrado por 1 hora de carpintaria

O ágio total a ser cobrado por estes insumos corresponderá à função objetivo:

$$\text{Min } w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

- Note que a função objetivo busca minimizar o custo de compra: este é o ponto de vista do comprador.

O comprador deseja o menor preço, mas o preço deve ser atraente o suficiente para induzir o fabricante de escrivaninhas a vender seus insumos

Assim:

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$$

Restrição das escrivaninhas

Ou seja, se comprarmos todos os insumos nas quantidades necessárias para produzir uma escrivaninha, o ágio a ser pago deve ser, no mínimo, o que o fabricante lucraria com a venda daquele produto.

O mesmo ocorre com as outros produtos:

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$$

Restr. das mesas

$$1y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$$

Restr. das cadeiras

Para determinarmos o menor ágio de compra dos insumos que mantenha a venda desses insumos interessantes para o fabricante, devemos resolver o problema dual

- As variáveis y_1, y_2, y_3 são normalmente denominadas ***preços-sombra*** dos insumos.

- Por definição, o preço-sombra da $i^{ésima}$ restrição corresponde à melhoria no valor z da função objetivo ocasionada pelo incremento de uma unidade no lado direito da restrição [ou seja, de b_i para $(b_i + 1)$].

Prática 13

Exercício 2 da lista.

Como ler a solução ótima do dual a partir da linha 0 (ou linha *z*) do tableau ótimo do primal
Caso 1 - *Primal* = *Max*

Para resolver o problema abaixo:

$$\begin{array}{llllll}
\textbf{Max } z = & 3x_1 + & 2x_2 + & 5x_3 & & \\
\textbf{s.a:} & 1x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 \leq 15 & \longrightarrow & \text{Adicionar var. folga } f_1 \\
 & & 2x_2 - & x_3 \geq 5 & \longrightarrow & \text{Adicionar var. excesso } e_2 \text{ e art. } a_2 \\
 & 2x_1 + & x_2 - & 5x_3 = 10 & \longrightarrow & \text{Adicionar var. artificial } a_3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

- A base inicial será formada por $B = \{ f_1, a_2, a_3\}$.
- Usaremos o Método do *M*-Grande para solucionar este problema.
- O tableau ótimo vem dado a seguir...

Tableau Ótimo

	x_1	x_2	x_3	f_1	e_2	a_2	a_3	RHS
z	0	0	0	$^{51}/_{23}$	$^{58}/_{23}$	M-$^{58}/_{23}$	M+$^{9}/_{23}$	$^{565}/_{23}$
x_3	0	0	1	$^{4}/_{23}$	$^{5}/_{23}$	$^{-5}/_{23}$	$^{-2}/_{23}$	$^{15}/_{23}$
x_2	0	1	0	$^{2}/_{23}$	$^{-9}/_{23}$	$^{9}/_{23}$	$^{-1}/_{23}$	$^{65}/_{23}$
x_1	1	0	0	$^{9}/_{23}$	$^{17}/_{23}$	$^{-17}/_{23}$	$^{7}/_{23}$	$^{120}/_{23}$

Regras para identificação da solução ótima dual na linha 0 (ou z) do tableau ótimo do primal (*Max*)

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\leq$ → Coeficiente de f_i na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\geq$ → -(Coeficiente de e_i) na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo = → (Coeficiente de a_i na linha 0 do tableau ótimo) - M

No tableau ótimo do exemplo anterior:

					y_1	$-y_2$		y_3-M	
	z	x_1	x_2	x_3	f_1	e_2	a_2	a_3	RHS
z	1	0	0	0	$^{51}/_{23}$	$^{58}/_{23}$	M-$^{58}/_{23}$	M+$^{9}/_{23}$	$^{565}/_{23}$
x_3	0	0	0	1	$^{4}/_{23}$	$^{5}/_{23}$	$^{-5}/_{23}$	$^{-2}/_{23}$	$^{15}/_{23}$
x_2	0	0	1	0	$^{2}/_{23}$	$^{-9}/_{23}$	$^{9}/_{23}$	$^{-1}/_{23}$	$^{65}/_{23}$
x_1	0	1	0	0	$^{9}/_{23}$	$^{17}/_{23}$	$^{-17}/_{23}$	$^{7}/_{23}$	$^{120}/_{23}$

Ou seja, o problema dual possui a seguinte solução ótima:

$$y_1 = {}^{51}/_{23};\quad y_2 = {}^{-58}/_{23};\quad y_3 = {}^{9}/_{23}$$

Conferindo o resultado na função objetivo do problema dual

Min $w = 15y_1 + 5y_2 + 10y_3$

$y_1 = {}^{51}/_{23}$; $y_2 = {}^{-58}/_{23}$; $y_3 = {}^{9}/_{23}$

$w = {}^{565}/_{23}$

Regras para identificação da solução ótima dual na linha 0 (ou *z*) do tableau ótimo do primal (*Min*)

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\leq$ → Coeficiente de f_i na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo $\geq$ → -(Coeficiente de e_i) na linha 0 do tableau ótimo

Valor ótimo da var. dual y_i qdo restrição i é do tipo = → (Coeficiente de a_i na linha 0 do tableau ótimo) + M

Prática 14

Exercício 3 da lista.

O Problema do Transporte

Descrição Geral de um problema de transporte:

1. Um conjunto de m pontos de fornecimento a partir dos quais um insumo é embarcado ou remetido.

   O ponto de fornecimento i pode fornecer no máximo s_i unidades.

2. Um conjunto de n pontos de demanda para os quais o insumo é remetido.

   O ponto de demanda j deve receber pelo menos d_j unidades do insumo.

Descrição Geral de um problema de transporte

3. Cada unidade produzida no ponto de fornecimento i e remetida ao ponto de demanda j incorre num custo de c_{ij}.

Formulação do Problema

Seja x_{ij} = nº de unidades despachadas do ponto de fornecimento i para o ponto de demanda j.

A formulação genérica do problema do transporte será:

$$Min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \quad (i = 1,\ldots,m) \longrightarrow$$ Restrições de fornecimento

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \quad (j = 1,\ldots,n) \longrightarrow$$ Restrições de demanda

$$x_{ij} \geq 0$$

Problema Balanceado

Um problema de transporte é considerado *balanceado* se:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Ou seja, o fornecimento supre toda a demanda.

Num problema balanceado, as restrições são todas <u>igualdades</u>.

Como balancear um problema de transporte quando a capacidade de fornecimento excede a demanda

Cria-se um ponto fictício de demanda. A demanda nesse ponto será igual ao excedente da capacidade.

Como balancear o problema quando a demanda é maior que a capacidade de fornecimento?

Neste caso, o problema não possui soluções viáveis.

Como alternativa, pode-se adicionar um ponto fictício de fornecimento. O custo de fornecimento daquele ponto será igual à penalização incorrida pelo não fornecimento do insumo.

O Tableau de Transporte

					Fornecimento
	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
Demanda	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

Exemplo

Dois reservatórios de água abastecem três cidades. Cada reservatório pode abastecer até 50 milhões de litros de água por dia. Cada cidade necessita receber 40 milhões de litros de água por dia.

Associado a cada milhão de litros de água não fornecido por dia existe uma multa. A multa na cidade 1 é de $20; na cidade 2 é de $18; na cidade 3 é de $23.

Os custos do transporte entre reservatórios e cidades vem dado ao lado...

	Cid.1	Cid.2	Cid.3
Reserv. 1	$7	$8	$8
Reserv. 2	$9	$7	$8

Tableau do Simplex

	Cid. 1	Cid. 2	Cid. 3	*Capacidade*
Res. 1	7	8	8	50
Res. 2	9	7	8	50
Res. Artif.	20	18	23	20
Demanda	40	40	40	

Prática 15

Exercício 4 da lista.

Método do Extremo Noroeste para Determinação da Solução Viável Inicial de um problema de Transporte

Inicie o método considerando a célula (1,1) do tableau. Faça com que x_{11} seja o maior valor possível.

Obviamente, $x_{11} = Min\ (d_1, s_1)$.

Se $x_{11} = s_1$, desconsidere as demais células na primeira linha do tableau, já que nenhuma outra variável básica virá desta linha. Atualize o valor de d_1 para $d_1 - s_1$.

Se $x_{11} = d_1$, desconsidere as demais células na primeira coluna do tableau, já que nenhuma outra variável básica virá desta coluna. Atualize o valor de s_1 para $s_1 - d_1$.

Método do Extremo Noroeste para Determinação da Solução Viável Inicial de um problema de Transporte

Se $x_{11} = s_1 = d_1$, desconsidere as demais células na primeira linha ou na primeira coluna do tableau (mas não ambas). Se você escolher desconsiderar a linha 1, mude d_1 para 0. Se você escolher desconsiderar a coluna 1, mude s_1 para 0.

Repita o procedimento, sempre escolhendo a célula posicionada no extremo noroeste do tableau (desde que ela não esteja em uma linha ou coluna eliminada anteriormente).

Ao cabo de $(m + n - 1)$ iterações chega-se a uma base viável inicial para o problema.

Exemplo

O método do extremo noroeste não utiliza os custos, omitidos nos tableaus abaixo:

5				~~5~~ 0
				10
				15
~~12~~ 7	8	4	6	

$x_{11} = Min\ \{12, 5\} = 5$

Exemplo

5				0
7				~~10~~ 3
				15
~~7~~	8	4	6	
0				

$$x_{21} = Min\ \{10, 7\} = 7$$

Exemplo

5				0
7	3			~~3~~ 0
				15
0	~~8~~ 5	4	6	

$x_{22} = \textit{Min}\ \{8, 3\} = 3$

Exemplo

5				0
7	3			0
	5			~~15~~ 10
0	~~5~~ 0	4	6	

$x_{32} = Min\ \{15, 5\} = 5$

Exemplo

5				0
7	3			0
	5	4		~~10~~ 6
0	0	~~4~~ 0	6	

$x_{33} = Min\ \{10, 4\} = 4$

Exemplo

Base Inicial Viável

5				0
7	3			0
	5	4	6	~~6~~ 0
0	0	4	~~6~~ 0	

$x_{34} = \mathit{Min}\ \{6, 6\} = 6$

Prática 16

Exercício 5 da lista.

O Método Simplex para problemas de transporte

Decidindo qual variável não-básica deve entrar na base

- Como calcular z_{ij} - c_{ij} para cada variável não-básica

A determinação de z_{ij} - c_{ij} envolve determinar um menor *loop* contendo algumas variáveis básicas e a variável não-básica em questão.

Existe um *loop* único possível para cada variável não-básica.

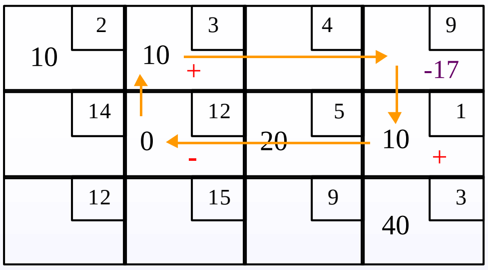
Exemplo

					Capacidd
	10 (2)	10 (3)	(4)	(9)	20
	(14)	0 (12)	20 (5)	10 (1)	30
	(12)	(15)	(9)	40 (3)	40
Demanda	10	10	20	50	

Base inicial determinada pelo método do extremo noroeste.

Determine a variável não-básica a entrar na base

Calcule z_{ij} - c_{ij} para cada variável não-básica:



$(+1-12+3) = -8$ $(-8) - 9 = -17$

Iniciando com x_{14}:

1. Determine um loop de var. básicas que contenha a var. não-básica.

2. Alterne sinais pos. e neg. nas var. bás. extremas.

3. Some os c_{ij} de acordo com os sinais.

4. Subtraia o coef. de custo da var. não-bás. em questão do resultado

Cálculo para x_{13}

2 10	3 10 +	4 -8	9 -17
14	12 0 -	5 20 +	1 10
12	15	9	3 40

(+5-12+3) = -4 (-4) - 4 = -8

Repetindo o cálculo p/ as demais var. não-básicas

2 10	3 10	4 -8	9 -17
14 -3	12 0	5 20	1 10
12 +1	15 -1	9 -2	3 40

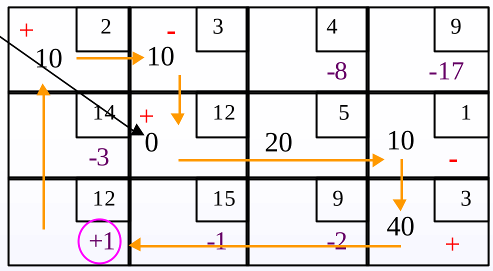
Num problema de *minimização* a variável mais positiva entra na base.

Para verificar qual variável deve sair da base, determine um *loop* contendo a var. entrante e algumas variáveis básicas

2 10	3 10	4 -8	9 -17
14 -3	12 0	5 20	1 10
12 +1	15 -1	9 -2	3 40

A primeira célula básica do *loop* recebe um sinal positivo, a segunda um sinal negativo, e assim por diante...

Dentre as células positivas, selecione aquela de menor valor: esta é a var. que sairá da base.



A variável entrante assumirá o valor da variável que sai da base.

Atualize o valor das demais células do *loop*: células com sinal + têm seu valor decrescido em θ; células com sinal -, têm seu valor acrescido de θ. A variável entrante entra na base com valor θ.

2 + 10	3 - 10	4	9
14	12 +	5 20	1 10 -
12 0	15	9	3 40 +

Novo tableau

Nenhuma var. não-bás. com $z_{ij} - c_{ij} > 0 \Rightarrow$ *tableau ótimo!*

10 (2)	10 (3)	(4) -7	(9) -16
(14) -4	(12) -1	20 (5)	10 (1)
0 (12)	(15) -2	(9) -2	40 (3)

Prática 17

Resolva o problema proposto no Slide 164.

O Problema da Alocação

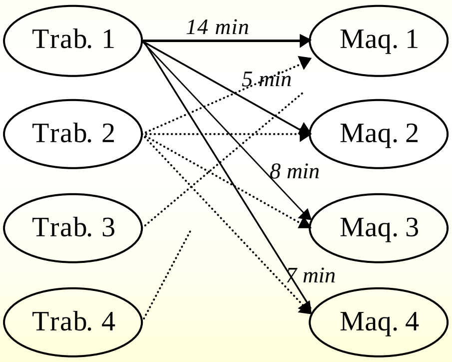
São problemas balanceados de transporte nos quais todas as demandas e todas as capacidades são iguais a 1.

As variáveis do problema são booleanas:

$x_{ij} = 1$; se o ponto de abastecimento *i* for utilizado para suprir a demanda no ponto de demanda *j*.

$x_{ij} = 0$; caso contrário.

Exemplo: Aloque trabalhos nas máquinas tal que tempo de setup seja mínimo



Tempo (*min*)

	Tr.1	Tr.2	Tr.3	Tr.4
Máq.1	14	5	8	7
Máq.2	2	12	6	5
Máq.3	7	8	3	9
Máq.4	2	4	6	10

Formulação

Variáveis de decisão:
x_{ij} = máquina *i* executando trabalho *j*; $i = 1,...,4$ e $j = 1,...,4$.

Função objetivo:

$$Max\ z = 14\,x_{11} + 5\,x_{12} + 8\,x_{13} + 7\,x_{14} + 2\,x_{21} + 12\,x_{22} + 6\,x_{23} + 5\,x_{24} + 7\,x_{31} + 8\,x_{32} + 3\,x_{33} + 9\,x_{34} + 2\,x_{41} + 4\,x_{42} + 6\,x_{43} + 10\,x_{44}$$

Restrições de máquina:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} = 1$$

Restrições de trabalho:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} = 1$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = 1$$

x_{ij} = 1 ou 0

Para resolver problemas de alocação, usaremos o *Algoritmo Húngaro*

Passo 1 - determine o elemento de custo mínimo em cada linha do tableau dos transportes. Construa um novo tableau subtraindo de cada custo o custo mínimo da linha correspondente. Determine então o custo mínimo em cada coluna. Construa um novo tableau subtraindo de cada custo o custo mínimo da coluna correspondente.

Passo 2 - determine o nº mínimo de linhas (horizontais e/ou verticais) necessárias para cobrir todos os zeros no tableau de custos reduzidos. Se forem necessárias *m* linhas, a resposta ótima é dada pelos zeros cobertos por linhas no tableau. Se menos de *m* linhas forem necessárias, siga para o passo 3.

Algoritmo Húngaro

Passo 3 - determine o menor elemento $\neq 0$ dentre os elementos não cobertos por linhas no tableau; seja k o valor deste elemento. Subtraia k de cada elemento não-coberto do tableau e adicione k a cada elemento coberto por duas linhas no tableau. Volte ao passo 2.

Nota - somente problemas balanceados podem ser resolvidos pelo algoritmo húngaro. Se um problema for não balanceado, adicione pontos artificiais de demanda ou capacidade.

Exemplo... →

Exemplo

				Mínimo da linha
14	5	8	7	5
2	12	6	5	2
7	8	3	9	3
2	4	6	10	2

Novo tableau após subtração dos mínimos de linha

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8
Mín. da coluna 0	0	0	2

Novo tableau após subtração dos mín. das colunas

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

3 linhas.
m = 4, logo proce-
demos c/ passo 3.

$k = 1$

Subtraindo e somando *k* nas devidas células...

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Note que o mínimo das linhas e colunas é 0!

4 linhas. Como m = 4, temos uma solução ótima.

Como identificar a solução ótima

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

O único zero coberto na col. 3 é x_{33}. Logo, x_{33} = 1, e a col. 3 e linha 3 não podem mais ser usadas.

O único zero coberto na col. 2 é x_{12}. Logo, x_{12} = 1, e a col. 2 e linha 1 não podem mais ser usadas.

Sendo assim, x_{24} = 1, e a linha 2 não pode mais ser usada. Logo, x_{41} = 1.

Algoritmo Húngaro - *Justificativa*

• Se uma constante k for adicionada (ou subtraída) de uma linha (ou coluna) de um problema balanceado, a solução ótima do problema permanece a mesma.

• Por exemplo:

$k\,(c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1m}x_{1m}) \rightarrow$ *linha 1*

• Qualquer solução ótima viável terá $x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1m} = 1$ e o ponto ótimo permanecerá o mesmo antes ou depois da adição de k aos coeficientes de custo.

• O mesmo vale para coluna.

Os passos do algoritmo húngaro criam uma sequência de problemas de alocação, todos com a mesma solução ótima

- Qualquer solução tal que todos $x_{ij} = 1$ tenham custo zero deve ser ótima.

- Quando conseguirmos custos zero em quantidade suficiente tal que *m* linhas sejam necessárias para cobri-los, teremos a base ótima (com *m* elementos) que procuramos.

Prática 18

Um treinador necessita formar um time de nadadoras para competir em uma prova olímpica de 400 metros medley. As nadadoras apresentam as seguintes médias de tempo em cada estilo:

		Tempo (s) /100 m		
Nadadora	Livre	Peito	Golfinho	Costas
1	54	54	51	53
2	51	57	52	52
3	50	53	54	56
4	56	54	55	53

Qual nadadora deve nadar qual estilo?

O Problema do Transbordo

- ***Ponto de fornecimento*** - pode remeter insumos para outros pontos mas não pode receber.

- ***Ponto de demanda*** - pode receber insumos de outros pontos mas não pode remeter.

- ***Ponto de transbordo*** - remete e recebe insumos de outros pontos.

Exemplo

A BITCO monta PCs em Manaus (150 PCs/dia) e Assunción do Paraguai (200 PCs/dia) e remete para suas lojas em São Paulo e Recife, totalizando 130 PCs por loja.

Os PCs são remetidos via aérea. A BITCO suspeita que devido à promoções e uso de outras empresas aéreas, seja mais econômico usar Brasília e Curitiba como pontos de transbordo.

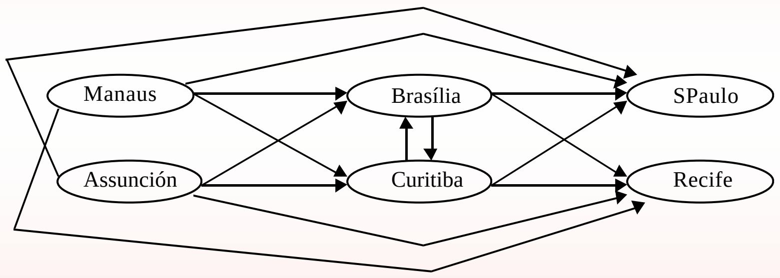
Os custos de transporte por PC vêm dados a seguir.

Custos

De/Para	Man	Ass	Bra	Cur	SP	Rec
Manaus	$0	-	$8	$13	$25	$28
Assuncion	-	$0	$15	$12	$26	$25
Brasilia	-	-	$0	$6	$16	$17
Curitiba	-	-	$6	$0	$14	$16
SPaulo	-	-	-	-	$0	-
Recife	-	-	-	-	-	$0

Exemplo

Deseja-se minimizar o custo do frete:



O problema do transbordo é resolvido como um problema balanceado de transportes

PASSO 1 - Balanceie o problema, se necessário.

Por exemplo:

Capacidade > Demanda

↓

Acrescente pto de demanda artificial → Capacidade = 0 ; Demanda = excedente capacidd.

↓

Cargas são remetidas p/ ponto artificial a custo zero.

Passo 2 - Construa o tableau do transporte

- Uma linha p/ cada ponto de fornecimento e transbordo.
- Uma coluna p/ cada ponto de demanda e transbordo.
- Cada ponto de fornecimento terá capacidade de fornecimento igual a sua capacidade original de fornecimento.
- Cada ponto de demanda terá demanda igual a sua demanda original.

Passo 2 - *Cont.*

- Seja s = capacidade total de fornecimento.

- Cada ponto de transbordo terá:

  ☑ capacidade = (capacidade do ponto original) + s

  ☑ demanda = (demanda do ponto original) + s

Passo 3 - Resolva o problema resultante como um problema de transporte

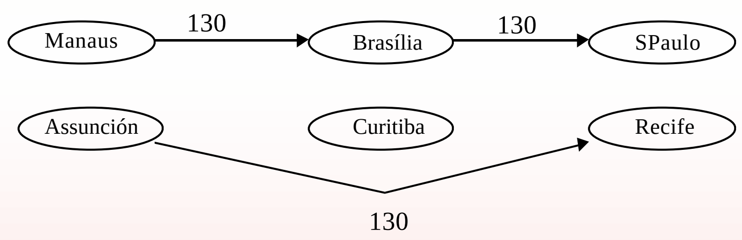
Ao interpretar a solução ótima:

- ☑ ignore remessas aos pontos artificiais;
- ☑ ignore remessas de um ponto para ele mesmo.

No exemplo

	Brasília	Curitiba	SPaulo	Recife	Artificial	*Capacidade*
Manaus	8	13	25	28	0	150
Assuncion	15	12	26	25	0	200
Brasília	0	6	16	17	0	350
Curitiba	6	0	14	16	0	350
Demanda	350	350	130	130	90	

Resultado


Manaus
130
Brasília
130
SPaulo
Assunción
Curitiba
Recife
130

Prática 19

A GM produz carros em SP e POA e tem um depósito (transbordo) em Foz do Iguaçu; a companhia fornece carros para Assunción e Buenos Aires. O custo do frete de um carro entre os pontos de fabricação e venda vem dado abaixo:

De/Para	SP	POA	Foz	Ass	Bue
Spaulo	\$0	\$140	\$100	\$90	\$225
POA	\$145	\$0	\$111	\$110	\$119
Foz	\$105	\$115	\$0	\$113	\$78
Assuncion	\$89	\$109	\$121	\$0	-
Buenos	\$210	\$117	\$82	-	\$0
	1100	2900		2400	1500

Demanda

Capacidade

Minimize os custos de transporte.

Modelos de Redes

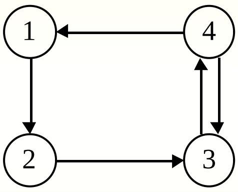
Definições básicas:

Grafos ou Redes $\xrightarrow{\textit{Defnido por}}$ *Nós* (ou vértices) / *Arcos*

Arco - par ordenado de vértices; representa uma possível direção de movimento entre vértices

(j, k) = arco representando o movimento do nó j (nó inicial) para o nó k (nó final).

Exemplo de Rede



Nós = {1, 2, 3, 4}

Arcos = {(1,2), (2,3), (3,4)
(4,3), (4,1)}

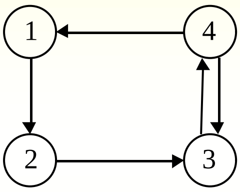
Correntes, Trilhas e Circuitos

CORRENTE = sequência de arcos tal que cada arco apresenta exatamente um vértice em comum com o arco anterior.

TRILHA = sequência de arcos tal que o nó terminal de cada arco é idêntico ao nó inicial do arco seguinte.

CIRCUITO = trilha finita em que o nó terminal coincide com o nó inicial.

No exemplo...



Ex. de corrente = (1,2) - (2,3) - (4,3)

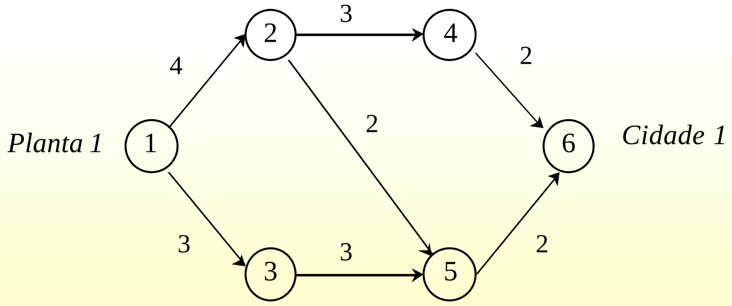
Ex. de trilha = (1,2) - (2,3) - (3,4)

Ex. de circuito = (1,2) - (2,3) - (3,4) - (4,1)

Problemas de determinação da trilha mais curta entre dois nós

Exemplo 1

- Desejamos remeter energia elétrica da planta 1 à cidade 1.
- A rede abaixo apresenta as distâncias entre pares de pontos conectados (incluindo subestações).
- Desejamos determinar a trilha mais curta entre a planta e a cidade.



Problemas de determinação da trilha mais curta entre dois nós

Exemplo 2

Eu comprei um carro novo por $12000. Os custos de manutenção e o valor na troca do carro em um determinado ano dependem da idade do carro no começo daquele ano.

Idade do Carro (anos)	***Custo anual de manutenção***
0	2000
1	4000
2	5000
3	9000
4	12000

Idade do Carro (anos)	***Valor na troca***
1	7000
2	6000
3	2000
4	1000
5	0

Exemplo 2

- O preço do carro novo em qualquer instante no tempo será $12000.

- Meu objetivo é minimizar o custo líquido:

(custo de compra) + (custos manutenção) - (valor recebido na troca)

durante os próximos cinco anos.

- Formule este problema como um problema de determinação da trilha mais curta.

Solução

- O problema terá 6 nós (i = 1, 2, …, 6).

- Arco (i, j) = comprar o carro novo no início do ano i e mantê-lo até o início do ano j.

- Custo c_{ij} = (custo de manutenção incorrido durante os anos i, i+1,…,j-1)

  +

  (custo de compra do carro no início do ano i)

  -

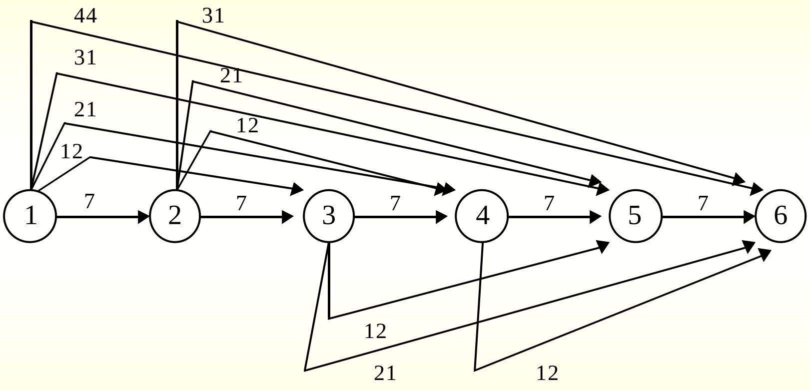
  (valor do carro na troca no início do ano j)

Solução

$$
\begin{aligned}
c_{12} &= 2 + 12 - 7 = 7 \\
c_{13} &= 2 + 4 + 12 - 6 = 12 \\
c_{14} &= 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21 \\
c_{15} &= 2 + 4 + 5 + 9 + 12 - 1 = 31 \\
c_{16} &= 2 + 4 + 5 + 9 + 12 + 12 - 0 = 44
\end{aligned}
$$

e assim por diante...

Rede



Algoritmo de Dijkstra

- Todas as distâncias diretas entre dois nós da rede são conhecidas e não-negativas.

- Todos os nós da rede recebem um rótulo *permanente* ou *temporário*.

- Um rótulo *temporário* representa o limite superior da menor distância entre o nó 1 e aquele nó.

- Um rótulo *permanente* corresponde à menor distância entre o nó 1 e aquele nó.

Passos do Algoritmo

Passo Inicial:

• O nó inicial recebe um rótulo permanente com valor zero.

• Todos os demais nós têm rótulos temporários com valor igual à distância direta entre o nó inicial e o nó em questão.

• Nós com rótulos temporários e não conectados diretamente com o nó inicial recebem valor $\propto$.

• Selecione, dentre os nós c/ rótulo temporário, aquele que apresentar o menor valor; esse nó passará a ter rótulo permanente.

• Em caso de empate, escolha aleatoriamente um dos nós de menor valor.

Passo 1

• Seja *k* o nó mais recente cujo rótulo foi transformado em permanente. Considere os demais nós (com rótulos temporários).

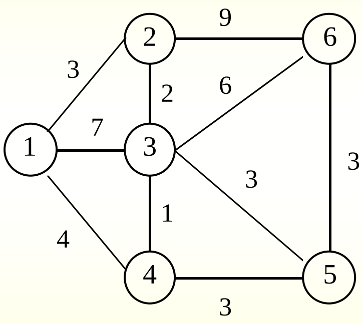
• Compare o valor de cada nó temporário com a soma (valor do nó + distância direta entre o nó *k* e o nó em questão). O mínimo entre esses valores será o novo valor do nó em questão.

Passo 2

•Selecione o nó com menor valor dentre aqueles com rótulo temporário; transforme seu rótulo em permanente.

• Se o nó escolhido acima for o nó final, pare. Caso contrário, retorne ao passo 1.

Exemplo



• Todos os arcos são ↔

• Deseja-se encontrar a trilha mais curta entre os nós 1 e 6.

Comece fazendo com que o nó 1 tenha um rótulo permanente = 0

Todos os demais nós recebem rótulos provisórios iguais a distância direta entre o nó em questão e o nó 1.

Assim:

** indica rótulo permanente.*

$L\ (0) = [0^*,\ 3,\ 7,\ 4,\ \propto,\ \propto]$

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 2).

- A menor distância entre nós 1 e 2 é = 3.

- Os novos rótulos são:

$$L(0) = [0^*,\ 3^*,\ 7,\ 4,\ \propto,\ \propto]$$

Para todos os demais nós (j = 3,4,5,6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 2 (=3) e a distância direta entre o nó 2 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para $j = 3 \rightarrow$ *min* $(3+2, 7) = 5$
- Para $j = 4 \rightarrow$ *min* $(3+\propto, 4) = 4$
- Para $j = 5 \rightarrow$ *min* $(3+\propto, \propto) = \propto$
- Para $j = 6 \rightarrow$ *min* $(3+9, \propto) = 12$

- Os novos rótulos são:

$L(2) = [0^*, 3^*, 5, 4, \propto, 12]$

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 4).

- A menor distância entre nós 1 e 4 é = 4.

- Os novos rótulos são:

$$L\ (2) = [0^*,\ 3^*,\ 5,\ 4^*,\ \infty,\ 12]$$

Para todos os demais nós (j = 3,5,6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 4 (=4) e a distância direta entre o nó 4 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para $j = 3 \rightarrow$ *min* $(4+1, 5) = 5$
- Para $j = 5 \rightarrow$ *min* $(4+3, \propto) = 7$
- Para $j = 6 \rightarrow$ *min* $(4+\propto, 12) = 12$

- Os novos rótulos são:

L (3) = [0*, 3*, 5, 4*, 7, 12]

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 3).

- A menor distância entre nós 1 e 3 é = 5.

- Os novos rótulos são:

$$L\ (3) = [0^*,\ 3^*,\ 5^*,\ 4^*,\ 7,\ 12]$$

Para todos os demais nós (j = 5,6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 3 (=5) e a distância direta entre o nó 3 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para $j = 5 \rightarrow$ min (5+3, 7) = 7
- Para $j = 6 \rightarrow$ min (5+6, 12) = 11

- Os novos rótulos são:

L (4) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7, 11]

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 5).

- A menor distância entre nós 1 e 5 é = 7.

- Os novos rótulos são:

$$L\ (4) = [0^*,\ 3^*,\ 5^*,\ 4^*,\ 7^*,\ 11]$$

Para todos os demais nós (j =6), calcule o número dado pela soma do valor no nó 5 (=7) e a distância direta entre o nó 5 e o nó j em questão

- Compare o número obtido com o rótulo temporário do nó j; o menor dentre esses valores passa a ser o novo rótulo temporário de j.

- Para $j = 6 \rightarrow$ *min* (7+3, 11) = 10

- Os novos rótulos são:

L (4) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10]

O menor dos rótulos temporários vira permanente (nó 6).

- A menor distância entre nós 1 e 6 é = 10.

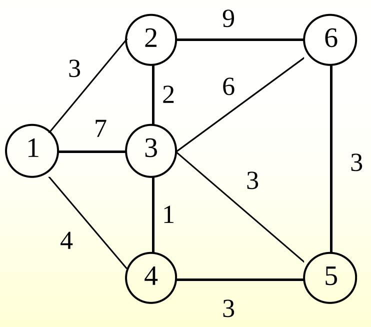
- Os novos rótulos são:

$$L\ (5) = [0^*,\ 3^*,\ 5^*,\ 4^*,\ 7^*,\ 10^*]$$

- O algoritmo termina e a menor trilha entre 1 e 6 pode ser determinada.

Determinando a trilha mais curta

- Comece do nó de destino (6). Calcule a diferença entre o rótulo permanente do nó 6 e os demais nós diretamente ligados a ele.



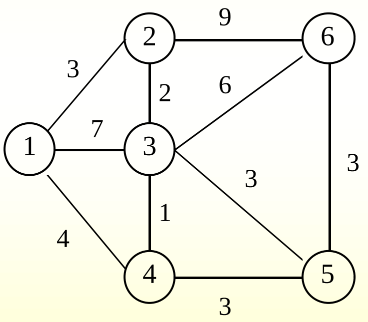
L (5) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10*]

Nós 2,3 e 5 estão diretamente ligados a 6.

Assim:

- (6→ 5): 10 - 7 = 3
- (6→ 3): 10 - 5 = 4
- (6→ 2): 10 - 3 = 7

Se a diferença (6→ *j*) for igual ao comprimento real do arco (*j*, 6), escolha *j* como ponto intermediário

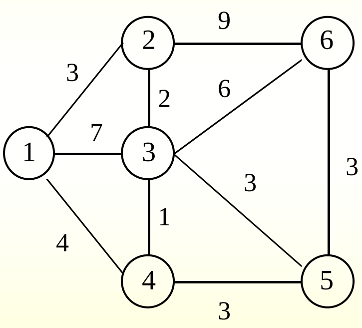


Diferenças / Arcos:

- (6→ 5) = 3 / (5,6) = 3
- (6→ 3) = 4 / (3,6) = 6
- (6→ 2) = 7 / (2,6) = 9

Assim, o primeiro nó intermediário no caminho entre 6 e 1 é o nó 5.

Repita o procedimento para o nó 5



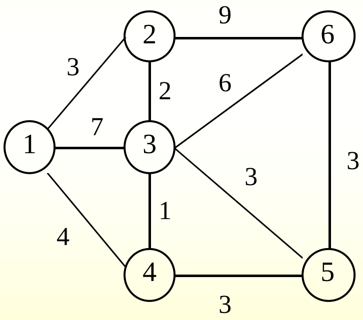
Nós 3 e 4 estão diretamente ligados a 5.

L (5) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10*]

Diferenças:

- (5→ 4): 7 - 4 = 3
- (5→ 3): 7 - 5 = 3

Se a diferença ($5 \rightarrow j$) for igual ao comprimento real do arco (j, 5), escolha j como ponto intermediário



Diferenças / Arcos:

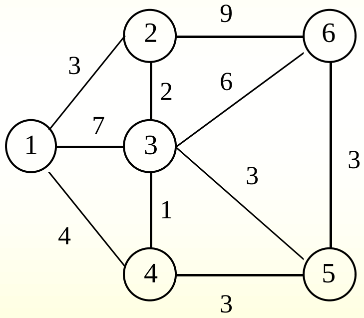
• ($5 \rightarrow 4$) = 3 / (4,5) = 3

• ($5 \rightarrow 3$) = 2 / (3,5) = 3

Assim, o segundo nó intermediário no caminho entre 6 e 1 é o nó 4.

Caminho parcial: $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$

Repita o procedimento para o nó 4



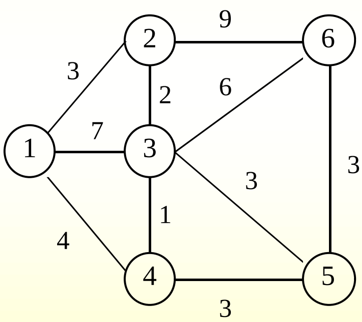
Nós 3 e 1 estão diretamente ligados a 4.

L (5) = [0*, 3*, 5*, 4*, 7*, 10*]

Diferenças:

- (4→ 3): 4 - 5 = -1
- (4→ 1): 4 - 0 = 4

Se a diferença (4→ *j*) for igual ao comprimento real do arco (*j*, 4), escolha *j* como ponto intermediário



Diferenças / Arcos:

- (4→ 3) = -1 / (3,4) = 1
- (4→ 1) = 4 / (1,4) = 4

Como o nó 1 é o nó de destino, determinamos a trilha mais curta entre os nós 1 e 6.

Trilha Mais Curta: 6 → 5 → 4 → 1

Prática 20

Use o algoritmo de Dijkstra para resolver o problema no slide 214.