
Pesquisa Operacional

Tópicos em Programação Linear e Inteira

Prof. Dr. Ricardo Ribeiro dos Santos

ricr.santos@gmail.com

Universidade Católica Dom Bosco - UCDB

Engenharia de Computação

Revisão: Tópicos de Álgebra Linear

Inversa de uma Matriz

- Se a inversa de uma matriz quadrada existe, então pode-se encontrá-la usando a eliminação de Gauss-Jordan
- Se a matriz dos coeficientes de um sistema de n equações lineares em n variáveis desconhecidas tem uma inversa, pode-se usar isso para descobrir a solução única do sistema
- Se A é uma matriz quadrada e se uma matriz B do mesmo tamanho pode ser encontrado tal que $AB=BA=I$, então A é dita invertível e B é sua inversa
- Se B não pode ser determinada, então dizemos que A é singular
- **Notação $B=A^{-1}$**

Inversa de uma Matriz

A Matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **é uma inversa de** $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

pois, $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

e, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Propriedades das Inversas

- *Se B e C são inversas de A , então $B=C$*
- *Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- *Se A é uma matriz invertível, então A^T é também invertível e*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Matriz Elementar

- Uma matriz $n \times n$ é chamada uma matriz elementar **se pode ser obtida da matriz identidade I_n $n \times n$** aplicando operações sobre as linhas da matriz

Matrizes Elementares e Operações de Linha

Quatro matrizes elementares

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Multiplique a
2ª linha de I_2
por -3**

**Troque a 2ª
linha pela 4ª
linha de I_4**

**Multiplique a
3ª linha de I_3
por 3 e some
à 1ª linha**

**Multiplique a
1ª linha de I_3
por 1**

Operações de Linha por Multiplicação de Matrizes

- Se a matriz elementar E é resultado de uma operação sobre a linha de I_m e se A é uma matriz $m \times n$, então o produto EA é a matriz que resulta quando a mesma operação de linha é realizada sobre A
 - Quando uma matriz A é multiplicada a esquerda por uma matriz elementar E , o efeito é uma operação elementar de linha sobre A .

Equivalência de Linha

- Matrizes que podem ser obtidas a partir de outra através de uma sequência finita de operações de elementares de linha são chamadas de equivalentes de linha
- Segue então que uma matriz A $n \times n$ é invertível **se e somente se é equivalente de linha para uma matriz identidade $n \times n$**

Um Método para Inversão de Matrizes

- Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A , deve-se encontrar uma seqüência de operações de linha que reduz A para a identidade e então aplicar essa mesma seqüência em I_n a fim de obter A^{-1}

Operações de Linha para Determinar A^{-1}

- Encontrar a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- Solução:

- Unimos a matriz identidade com o lado direito da matriz A , produzindo assim uma matriz na forma

$$[A \mid I]$$

- aplica-se operações de linha sobre essa matriz até que o lado direito é reduzido para I ; essas operações converterão o lado direito para A^{-1} , fazendo com que a matriz final tenha a forma

$$[I \mid A^{-1}]$$

Operações de Linha para Determinar A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

**Resolvemos -2 vezes a 1ª linha e somamos com a 2ª linha;
Resolvemos -1 vezes a 1ª linha e somamos com a 3ª linha;**

Resolvemos 2 vezes a 2ª linha e somamos com a 3ª linha;

Operações de Linha para Determinar A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Multiplicamos a 3ª linha por -1;

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

**Multiplicamos 3 vezes a 3ª linha e somamos com a 2ª linha;
Multiplicamos -3 vezes a 3ª linha e somamos com a 1ª linha;**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Multiplicamos -2 vezes a 2ª linha e somamos com a 1ª linha;

Assim,

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Uma Matriz que Não é Invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

**Multiplicamos -2 vezes a 1ª linha e somamos com a 2ª linha;
Somamos a 1ª linha com a 3ª linha;**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Adicionamos a 2ª linha com a 3ª linha

Como obtivemos uma linha de zeros na parte esquerda, a matriz A não é invertível.

Uma Consequência da Inversão de Matrizes

- Se A é uma matriz invertível $n \times n$, então, para cada matriz b $n \times 1$, o sistema de equações $Ax=b$ possui exatamente uma solução, denominada
$$x = A^{-1}b$$

Solução de um sistema linear usando A^{-1}

Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\x_1 \quad \quad + 8x_3 &= 17\end{aligned}$$

O sistema pode ser escrito como uma representação de matrizes $Ax=b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Note que A^{-1} é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Então, pode-se notar que

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1=1, \mathbf{x}_2=-1, \mathbf{x}_3=2$$

Caracterização de Matrizes Invertíveis

- Se A é uma matriz $n \times n$, então as seguintes propriedades são equivalentes:
 - A é invertível
 - $Ax=0$ possui apenas uma solução trivial
 - A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares
 - $Ax=b$ é consistente para toda matriz b $n \times 1$
 - $Ax=b$ tem exatamente uma solução para toda matriz b $n \times 1$