

Dualidade

Relaxação Lagrangiana e o Problema Dual

Prof. Ricardo R. Santos

Problema Dual e Problema Primal

- Dependendo do problema a ser abordado, questões como a seguir podem ser de interesse:
 - Em um problema de planejamento de produção, se o estoque de uma matéria-prima aumentar, como o custo de produção aumentaria?
 - Em um problema de corte de material, se a demanda por um tamanho de um item fosse maior ou menor, como a perda do material seria alterada?
- Essas questões indicam a necessidade de analisar o modelo de PL sob outro ponto de vista e introduzem um novo modelo de otimização linear, chamado ***problema dual***, em correspondência ao original, chamado de ***problema primal***

Problema Dual e Problema Primal

- Considere o seguinte problema de PL (problema primal) na forma padrão
 - ***Deseja-se cortar bobinas de aço sendo que cada bobina tem largura $L=1m$ e pesa 1 ton., para a produção de 108 ton de sub-bobinas de 0,4m e 120 ton de 0,3m. O peso total da bobinas cortadas deve ser mínimo. Os padrões de corte encontrados são conforme apresentados nos vetores***

$$p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Seja x_j a quantidade (em ton) de bobinas cortadas segundo o padrão de corte j , então temos:

$$\text{Min} \quad f(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.a} \quad \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = 108 \tag{1}$$

$$\frac{3}{5}x_2 + \frac{9}{10}x_3 = 120$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema Dual e Problema Primal

- A solução básica ótima obtida pela resolução do sistema $Bx_b=b$ é $x^*=(35 \ 200 \ 0)^T$ e
 $f(x^*)=1*35+1*200+1*0=235$
 - ***Se houvesse um aumento na demanda das sub-bobinas, qual é o impacto disso sobre a necessidade de cortar mais bobinas?***
- Observe que se considerarmos que o vetor b pode sofrer perturbações, então $b-Ax=0$ não precisa ser satisfeita exatamente, de forma que:
 - $y=b-Ax$, y é um vetor que corresponde a uma perturbação no vetor b , de modo que a solução do problema agora pode ser $Ax=b-y$
- Considere λ_i seja o custo unitário de perturbar o recurso i . Assim, $\lambda_i y_i$ é o custo de perturbar o recurso i em y_i unidades

Problema Dual e Problema Primal

- Tem-se então um novo problema associado, chamado *problema lagrangiano*, isto é, para cada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, resolva:
 - Min $f(x) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_m y_m$ em que $y = b - Ax$
- Definição 1 (função lagrangiana e função dual): A função objetivo do problema lagrangiano é chamada função lagrangiana, e é dada por:
 - $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_m y_m$
 - dado que $y = b - Ax$, então
 - $L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T y$
 $= c^T x + \lambda^T (b - Ax)$
 $= (c^T - \lambda^T A)x + \lambda^T b$
 - Note que: $(c^T - \lambda^T A) = (c_1 - \lambda^T a_1, c_2 - \lambda^T a_2, \dots, c_n - \lambda^T a_n)$. Então, $L(x, \lambda)$ pode ser escrita como:
 $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = (c_1 - \lambda^T a_1)x_1 + (c_2 - \lambda^T a_2)x_2 + \dots + (c_n - \lambda^T a_n)x_n + \lambda^T b$

Problema Dual e Problema Primal

- A função dual é definida por:

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} g(\lambda) &= \{L(x_1, \dots, x_n, \lambda)\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{(c_1 - \lambda^T a_1)x_1 + (c_2 - \lambda^T a_2)x_2 + \dots + (c_n - \lambda^T a_n)x_n + \lambda^T b\} \\ &= \min_{x_1 \geq 0} \{(c_1 - \lambda^T a_1)x_1\} + \min_{x_2 \geq 0} \{(c_2 - \lambda^T a_2)x_2\} + \dots + \min_{x_n \geq 0} \{(c_n - \lambda^T a_n)x_n\} + \lambda^T b \end{aligned}$$

- Considere o problema de corte anterior, a função dual é dada por:

$$g(\lambda) = \text{Min } L(x, \lambda) = x_1 + x_2 + x_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

Em que
$$y_1 = 108 - \frac{4}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 \quad \text{e} \quad y_2 = 120 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{9}{10}x_3$$

$$= \min_{x_1 \geq 0} (1 - 4/5\lambda_1)x_1 + \min_{x_2 \geq 0} (1 - 2/5\lambda_1 - 3/5\lambda_2)x_2 + \dots + \min_{x_3 \geq 0} (1 - 9/10\lambda_2)x_3 + (108\lambda_1 + 120\lambda_2)$$

Problema Dual e Problema Primal

- Pela definição de função dual e definindo $R = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x \geq 0\} \supseteq S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax=b, x \geq 0\}$, temos:
$$g(\lambda) = \min_{x \geq 0} c^T x + \lambda^T (b - Ax) \leq \min_{\{Ax=b, x \geq 0\}} c^T x + \lambda^T (b - Ax)$$
$$= \min \{c^T x, \text{ sujeito a: } Ax=b, x \geq 0\}$$
$$\leq f(x), \text{ para todo } x \text{ tal que } Ax=b, x \geq 0$$
- Propriedade 1: para todo $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e para todo x tal que $Ax=b, x \geq 0$, então $g(\lambda) \leq f(x)$
- Definição 2 (problema dual): O maior limitante inferior para $f(x)$, obtido pela função dual, define o *problema dual lagrangiano*, ou simplesmente *problema dual*, dado por:
$$\text{Max } g(\lambda)$$
$$\lambda \in \mathbb{R}^m$$
As variáveis $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ são chamadas *variáveis duais*.

Problema Dual e Problema Primal

- Propriedade 2 (problema dual) Considere o seguinte problema primal:
$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$
- Então o problema dual é dado pelo seguinte problema de otimização linear:
$$\begin{aligned} \text{Max } g(\lambda) &= b^T \lambda \\ A^T \lambda &\leq c \end{aligned}$$
- Os coeficientes da função objetivo dual são dados pelo vetor de recursos **b** do problema primal. O termo independente das restrições duais é dado pelo vetor custo **c** do problema primal, e a matriz de restrições do problema dual é a transposta da matriz das restrições do problema primal, A^T .

Problema Dual e Problema Primal

- Definição 3 (restrições duais e solução dual factível) O conjunto de restrições $A^T\lambda \leq c$ é chamado de restrições duais, e todo vetor λ que satisfaça as restrições duais é chamado de solução dual factível.

– Exemplo: o problema dual do problema primal em (1):

$$\text{Max } g(\lambda) = 108\lambda_1 + 120\lambda_2$$

$$\text{s.a } \frac{4}{5}\lambda_1 + 0\lambda_2 \leq 1$$

$$\frac{2}{5}\lambda_1 + \frac{3}{5}\lambda_2 \leq 1$$

$$0\lambda_1 + \frac{9}{10}\lambda_2 \leq 1$$

- Propriedade 3: o dual do problema dual é o problema primal.

Problema Dual e Problema Primal

- Regras para construção do problema dual

Primal (dual)	Dual (primal)
Minimização	Maximização
Vetor de recursos	Gradiente do objetivo
Gradiente do objetivo	Vetor de recursos
Restrição =	Livre Variável
<=	<=
>=	>=
Variável >=	<= Restrição
<=	>=
Livre	=

Problema Dual e Problema Primal

- Exemplo1:

Primal

$$\text{Min } f(x) = x_1 + 2x_2$$

s.a

$$-2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Dual: (problema de maximização com duas restrições e três variáveis)

$$\text{Max } g(\lambda) = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_3 \quad (\text{devido ao primal de minimização})$$

s.a

$$-2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \leq 1 \quad (\text{devido às variáveis primais } x_j \geq 0)$$

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 \leq 2$$

$$\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \leq 0 \quad (\text{devido às variáveis primais } \leq)$$

Problema Dual e Problema Primal

- Exemplo2:

Primal

$$\text{Min } f(x) = x_1 + 2x_2$$

s.a

$$-2x_1 + x_2 = 10$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Dual: (problema de maximização com duas restrições e duas variáveis)

$$\text{Max } g(\lambda) = 10\lambda_1 + 2\lambda_2 \quad (\text{devido ao primal de minimização})$$

s.a

$$-2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 1 \quad (\text{devido às variáveis primais } x_j \geq 0)$$

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq 2$$

$$\lambda_2 \leq 0 \quad (\text{note que } \lambda_1 \text{ é livre devido à primeira restrição de igualdade})$$

Problema Dual e Problema Primal

- Exemplo 3:

Primal

$$\text{Min } f(x) = 3x_1 + 2x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Primal

$$\text{Max } f(x) = x_1 + 2x_2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \text{ é livre}, x_3 \leq 0$$