

Determinação de Uma Solução Básica Factível Inicial

Método das duas fases

Prof. Ricardo R. Santos

Determinação de Uma Solução Básica Factível Inicial

- Para que o simplex seja aplicado, precisamos de uma solução básica factível inicial (Fase I do Algoritmo Simplex)
- Para algumas classes de problemas de PL existem, naturalmente, essas soluções básicas factíveis
- No entanto, em geral, uma solução básica factível não está disponível...

$$\text{Min } f(x) = c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

- Em que A não possui uma submatriz identidade

Determinação de Uma Solução Básica Factível Inicial

- Assim, a questão é como encontrar partição em A , $A=[B \ N]$ tal que exista B^{-1} e $x_B=B^{-1}b \geq 0$, isto é, uma partição factível
- Como exemplo da complexidade, se A é uma matriz 10×20 então um procedimento simples pode envolver a resolução de

$$C_{10}^{20} \frac{20!}{10!(20-10)!}$$

Método das Duas Fases

- Se o problema está na forma de igualdades não há variáveis de folga
 - $Ax + y = b$
 - $x \geq 0, y \geq 0$
- A variável y é chamada de variável artificial e não faz parte do problema original, portanto, deve ser eliminada
- Para eliminar variáveis artificiais utilizamos um novo objetivo, que resulta no *problema artificial*

Método das Duas Fases

- Para eliminar variáveis artificiais utilizamos um novo objetivo, que resulta no *problema artificial*

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f_a(x,y) = \sum_{i=1}^m y_i \\ Ax+y=b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

- A função objetivo fa penaliza as variáveis artificiais de forma que a solução ótima deve ser (se possível) $y_i=0, i=1,\dots,m$
- Caso haja colunas da matriz identidade na matriz A essas podem ser utilizadas na construção da base inicial, sendo complementadas com variáveis artificiais

Método das Duas Fases

- Considere o exemplo:

$$\text{Min } f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,3$$

- Temos dois casos para utilização de variáveis artificiais:
 - Caso A: uma variável artificial é introduzida em cada restrição
 - Caso B: Apenas uma variável artificial é introduzida (ou ou mais coluna(s) da matriz identidade já está(ão) disponível(eis))

Método das Duas Fases

- Caso A: uma variável artificial é introduzida (x_5 e x_6) em cada restrição

$$\text{Min } f_a(x_1, \dots, x_6) = x_5 + x_6$$

s.a

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 4$$

$$x_i \geq 0, i=1, \dots, 6$$

- Caso B: Apenas uma variável artificial é introduzida (x_5) já que uma ou mais coluna(s) da matriz identidade já está(ão) disponível(eis)

$$\text{Min } f_a(x_1, \dots, x_5) = x_5$$

s.a

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$$

$$x_i \geq 0, i=1, \dots, 5$$

Método das Duas Fases

- Tanto no caso A quanto no B as matrizes básicas são identidades , ou permutações desta, dependendo da ordem em que as variáveis básicas são definidas
- O problema artificial tem sempre uma partição básica factível óbvia
 - $B=I$
 - I é formada pelas colunas das variáveis artificiais (caso A) e das variáveis originais (caso B)
- Portanto, pode-se aplicar o algoritmo Simplex que promoverá a troca das colunas das variáveis artificiais por colunas das variáveis originais
- Ao final do algoritmo Simplex, as variáveis artificiais são não-básicas e uma base com as colunas originais de A é obtida

Método das Duas Fases

- Se o problema original tem solução factível $\hat{x}$, então:
 - $A\hat{x}=b$
 - $\hat{x} \geq 0$
- Essa solução é ótima para o problema artificial pois o par $(\hat{x}, 0)$, ou seja, $\hat{y}=0$, é factível para o problema artificial
 - $A\hat{x} + \hat{y}=b$
 - $\hat{x} \geq 0, \hat{y} \geq 0$
 - $E f_a(\hat{x}, \hat{y})=0$, que é o mínimo possível para o objetivo artificial
- Assim que encontrar uma solução básica em que todas as variáveis artificiais são não-básicas, temos uma base formada pelas colunas originais
 - Portanto, pode-se aplicar o Simplex para se resolver o problema original a partir dessa base

Método das Duas Fases

- Assim que encontrar uma solução básica em que todas as variáveis artificiais são não-básicas, temos uma base formada pelas colunas originais
 - Portanto, pode-se aplicar o Simplex para se resolver o problema original a partir dessa base
- Fase I: resolve o problema artificial
- Fase II: resolve o problema original a partir de uma base factível obtida na Fase I
 - Se o problema original é infactível, então o problema artificial tem solução ótima com $y \neq 0$

Método das Duas Fases

- Exemplo: Considere o problema de PL já apresentado e utilizando o caso B do método de duas fases:
 - $\text{Min } f_a(x_1, \dots, x_5) = x_5$
 - $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3$
 - $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$
 - $x_i \geq 0, i=1, \dots, 5$
- Fase I: $B_1=4, B_2=5, N_1=1, N_2=2, N_3=3$
 - Base final é formada por variáveis do problema original, a variável artificial x_5 torna-se não básica. Fim da Fase I
- Fase II: Aplicar o método Simplex a partir da base obtida na Fase I. A variável artificial (x_5) é descartada e os índices não básicos são redefinidos

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase I: Partição básica factível inicial

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- 1ª. Iteração

– Passo 1: {cálculo da solução básica} = $x_B = (x_4, x_5)$

- Resolver o sistema $Bx_B = b$

– $x_B^T = (4, 3)$

- Avaliação da função objetivo:

– $f(x) = c_{B1}x_{B1} + c_{B2}x_{B2} = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 3$

– Passo 2: {Vetor multiplicador simplex}

– $B^T \lambda = c_B \quad \text{e} \quad \lambda^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Custos relativos:

– $N_1 = 1 : \hat{c}_1 = c_1 - \lambda^T a_1 = -1 \rightarrow x_{N1} \text{ entra na base}$

– $N_2 = 2 : \hat{c}_2 = c_2 - \lambda^T a_2 = -1$

– $N_3 = 3 : \hat{c}_3 = c_3 - \lambda^T a_3 = -1$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- 1ª. Iteração
 - Passo 3: {teste de otimalidade}
 - Como os custos relativos ($c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -1$) são negativos, a solução atual não é ótima!
 - Passo 4: {cálculo da direção simplex}
 - Resolver o sistema $By = a_1$ e obtenha $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
 - Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}
 - $\hat{\epsilon} = \min(\hat{x}_{B1}/y_1, \hat{x}_{B2}/y_2) = \min(4/2, 3/1) = 2 = \hat{x}_{B1}/y_1$
 - $x_{B1} = x_4$ sai da base
 - Passo 6: {atualização}
 - $(B_1, B_2) = (1, 5)$, $(N_1, N_2, N_3) = (4, 2, 3)$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- 2ª. Iteração:
 - Passo 1: {cálculo da solução básica} = $x_B = (x_1, x_5)$
 - Resolver o sistema $Bx_B = b$
 - $x_B^T = (2, 1)$
 - Passo 2: {Vetor multiplicador simplex}
 - $B^T \lambda = c_B$ e $\lambda^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$
 - Custos relativos:
 - $N_1=4$: $\hat{c}_4 = c_4 - \lambda^T a_4 = 1/2$
 - $N_2=2$: $\hat{c}_2 = c_2 - \lambda^T a_2 = -3/2 \rightarrow x_{N2}$ entra na base
 - $N_3=3$: $\hat{c}_3 = c_3 - \lambda^T a_3 = 1/3$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- 2ª. Iteração
 - Passo 3: {teste de otimalidade}
 - Como o custo relativo ($c_2 = -3/2$) é negativo, a solução atual não é ótima!
 - Passo 4: {cálculo da direção simplex}
 - Resolver o sistema $By = a_1$ e obtenha $y = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$
 - Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}
 - $\hat{\varepsilon} = \min(\hat{x}_{B2} / y_2) = \min(1/3/2) = 2/3 = \hat{x}_{B2} / y_2$
 - $x_{B2} = x_5$ sai da base
 - Passo 6: {atualização}
 - $(B_1, B_2) = (1, 2), \quad (N_1, N_2, N_3) = (4, 5, 3)$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Note que a base é formada pelas variáveis x_1 e x_2 e x_5 faz parte das variáveis não básicas
 - A variável artificial (x_5) é descartada e os índices não básicos são redefinidos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Aplicar o Simplex a partir da base anterior