

Método Simplex

Resolução Algébrica

Prof. Ricardo Santos

Método Simplex

- Dada uma solução factível:
 - Essa solução é ótima?
 - Caso não seja ótima, como determinar uma melhor?
- Considere uma solução básica factível:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{x}_N \end{bmatrix} \text{ em que } \begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0 \\ \hat{x}_N = 0, \end{cases}$$

- E a solução geral usando a mesma partição básica

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \text{ tal que } x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Método Simplex

- A função objetivo $f(x)$ pode ser expressa considerando a partição básica:

$$- f(x) = c^T x = \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

- c_B^T : coeficientes das variáveis básicas na função objetivo
- c_N^T : coeficientes das variáveis não-básicas na função objetivo

- Como $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ então:

$$- f(x) = c_B^T (\underbrace{B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}_{x_B}) + c_N^T x_N \quad (1)$$

- O primeiro termo de (1) corresponde ao valor da função objetivo em $\hat{x}$:

$$f(\hat{x}) = c_B^T \hat{x}_B + c_N^T \hat{x}_N = c_B^T (B^{-1}b) + c_N^T (0) = c_B^T B^{-1}b$$

Método Simplex

- Definição 1 (vetor multiplicador simplex): O vetor λ de ordem $m \times 1$, dado por
 - $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$
 - é chamado de vetor multiplicador simplex (ou também, vetor de *variáveis duais*)
 - O vetor multiplicador simplex pode ser obtido pela resolução do sistema de equações lineares $\lambda B^T = c_B$, que é obtido ao se tomar a transposta de $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ e multiplicar ambos os termos da igualdade por B^T
 - $\lambda^T = c_B^T B^{-1} \iff \lambda = (B^{-1})^T c_B \iff B^T \lambda = c_B$
 - Utilizando o vetor multiplicador simplex em (1) temos que:

$$f(x) = f(\hat{x}) - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = f(\hat{x}) - \lambda^T N x_N + c_N^T x_N$$

$$= f(\hat{x}) + (c_N^T - \lambda^T N) x_N$$

Método Simplex

- Utilizando o vetor multiplicador simplex em (1) temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = f(\hat{x}) - \lambda^T N x_N + c_N^T x_N \\ &= f(\hat{x}) + (c_N^T - \lambda^T N) x_N \end{aligned}$$

- Note ainda que:

$$\begin{aligned} c_N^T - \lambda^T N &= (c_{N1}, c_{N2}, \dots, c_{N_{n-m}}) - \lambda^T (a_{N1}, a_{N2}, \dots, a_{N_{n-m}}) \\ &= (c_{N1} - \lambda^T a_{N1}, c_{N2} - \lambda^T a_{N2}, \dots, c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}}) \end{aligned}$$

- e

$$x_N = (x_{N1}, x_{N2}, \dots, x_{N_{n-m}})$$

- obtemos

$$f(x) = f(\hat{x}) + (c_{N1} - \lambda^T a_{N1}) x_{N1} + (c_{N2} - \lambda^T a_{N2}) x_{N2} + \dots + (c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}$$

Método Simplex

- Definição 2(custos relativos): Os coeficientes $\hat{c}_{NJ} = (c_{NJ} - \lambda^T a_{NJ})$ das variáveis não-básicas da função objetivo (2) são chamados custos relativos ou custos reduzidos

$$- \quad f(x) = f(\hat{x}) + \hat{c}_{N1}x_{N1} + \hat{c}_{N2}x_{N2} + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}}x_{N_{n-m}} \quad (3)$$

Método Simplex

- Propriedade 1 (condição de otimalidade): Considere uma partição básica $A=[B \ N]$ em que a solução básica associada $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ (solução básica factível), e seja λ^T o vetor multiplicador simplex. Se $c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j} \geq 0$, $j=1, \dots, n-m$, (todos os custos relativos são não-negativos), então a solução básica é ótima.
- Pergunta: Como determinar uma solução básica factível melhor?
 - Considere uma solução básica factível e suponha que a condição de otimalidade seja violada (caso contrário, a solução é ótima), isto é, suponha que exista k tal que:

$$\hat{c}_{N_k} = c_{N_k} - \lambda^T a_{N_k} < 0$$

Método Simplex

- Definição 3(estratégia simplex): Chamamos de estratégia simplex a perturbação de uma solução básica factível que consiste em alterar as variáveis não-básicas por:
 - $$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \geq 0, \text{ (variável com custo relativo negativo)} \\ x_{N_j} = 0, j=1, 2, \dots, n-m, j \neq k \end{cases}$$
- Ou seja, apenas uma variável não-básica, x_{N_k} , deixa de ser nula. Com isso, a função objetivo (3) passa a ser:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) + \hat{c}_{N_1} 0 + \dots + \hat{c}_{N_k} \varepsilon + \dots + \hat{c}_{N_{n-m}} 0 \\ &= f(\hat{x}) + c_{N_k} \varepsilon < f(\hat{x}) \end{aligned}$$
- Observe que a função objetivo decresce quando ε cresce
 - Isso justifica a escolha da variável não-básica a ser perturbada com o menor custo relativo

Método Simplex

- Definição 4(direção simplex): Chamamos de direção simplex o vetor $y=B^{-1}a_{N_k}$, o qual fornece os coeficientes de como as variáveis básicas são alteradas pela estratégia simplex. A direção simplex é solução do sistema de equações lineares $By=a_{N_k}$
 - Observe que as variáveis básicas podem ser escritas como:
 - $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \hat{x}_B - B^{-1}a_{N_k}\varepsilon = \hat{x}_B - y\varepsilon \quad (4)$
- Reescrevendo a equação vetorial (4) em cada uma de suas coordenadas e considerando a não-negatividade das variáveis básicas
$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i\varepsilon \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Método Simplex

- Assim,
 - Se $y_i \leq 0$, então $x_{B_i} \geq 0$, para todo $\varepsilon \geq 0$
 - Se $y_i > 0$, como $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0$, então $\varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$
- Logo, o maior valor para ε é dado por

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } y_i > 0 \right\}$$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase I:
 - Determine inicialmente a partição básica factível $A=[B \ N]$. A rigor, precisamos de dois vetores de índices básicos e não-básicos:
 - $(B_1, B_2, \dots, B_m)$ e $(N_1, N_2, \dots, N_{n-m})$
 - Os vetores das variáveis básicas e não-básicas são, respectivamente:
 - $x_B^T = (x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm})$ e $x_N^T = (x_{N1}, x_{N2}, \dots, x_{Nn-m})$
 - Faça iteração=1
- Fase II: {início da iteração simplex}
 - Passo 1: {cálculo da solução básica}
 - $\hat{x}_B = B^{-1}b$ //ou, equivalentemente, resolve o sistema $Bx_B = b$
 - $\hat{x}_N = 0$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: {início da iteração simplex}
 - Passo 2: {cálculo dos custos relativos}
 - 2.1) {vetor multiplicador simplex}
 - $\lambda^T = c^T B^{-1}$
 - 2.2) {custos relativos}
 - $\hat{c}_{N_j} = c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n - m$
 - 2.3) {determinação da variável a entrar na base}
 - $c_{N_k} = \text{mínimo}\{c_{N_j}, j = 1, \dots, n - m\}$ (variável x_{N_k} entra na base)
 - Passo 3: {teste da otimalidade}
 - Se $c_{N_k} \geq 0$, então: pare //solução na iteração atual é ótima

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: {continuação}
 - Passo 4: {cálculo da direção simplex}
 - $y = B^{-1}a_{Nk}$
 - Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}
 - Se $y \leq 0$, então: pare //problema não tem solução ótima finita. $f(x) \rightarrow -\infty$
 - Caso contrário, determine a variável a sair da base pela razão mínima
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \text{mínimo} \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \text{ tal que } y_i > 0, i = 1, \dots, m \right\} // \text{a variável } x_{B_l} \text{ sai da base}$$
 - Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a l-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N}
 - Matriz básica nova: $B = [a_{B1} \dots a_{B_{l-1}} \ a_{Nk} \ a_{B_{l+1}} \ \dots \ a_{Bm}]$
 - Matriz não-básica nova: $N = [a_{N1} \dots a_{N_{k-1}} \ a_{B_l} \ a_{N_{k+1}} \ \dots \ a_{N_{n-m}}]$
 - iteração = iteração + 1
 - Retorne ao passo 1

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Exemplo:
 - Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$
 - $x_1 + x_2 \leq 6$
 - $x_1 - x_2 \leq 4$
 - $-x_1 + x_2 \leq 4$
 - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- Após introduzir as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5 , temos o problema na forma padrão
- Na Fase I, obtemos uma partição básica factível:
 - $(B_1, B_2, B_3) = (3, 4, 5), (N_1, N_2) = (1, 2),$
 - Ou seja, $B = I$. Fazendo $(x_1, x_2) = (0, 0)$, temos (trivialmente) os valores das variáveis básicas

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração

	Índices					
	Básicos			Não-básicos		
	B ₁ =3	B ₂ =4	B ₃ =5	N ₁ =1	N ₂ =2	b
[B N]	1	0	0	1	1	6
	0	1	0	1	-1	4
	0	0	1	-1	1	4
[c _B c _N]	0	0	0	-1	-2	f=0

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração
 - Passo 1: {cálculo da solução básica} = $x_B = (x_3, x_4, x_5)$
 - Resolver o sistema $Bx_B = b$
 - $x_B = (6, 4, 4)$
 - Avaliação da função objetivo:
 - $f(x) = c_{B1}x_{B1} + c_{B2}x_{B2} + c_{B3}x_{B3} = 0*6 + 0*4 + 0*4 = 0$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração

- Passo 2: {cálculo dos custos relativos}

- 2.1) {vetor multiplicador simplex}: $(c_B = (c_{B1}, c_{B2}, c_{B3}) = (c_3, c_4, c_5) = (0, 0, 0))$.

- Solução do sistema $B^T \lambda = c_B$ é $\lambda^T = (0, 0, 0)$

- 2.2) {custos relativos}: $(N_1=1, N_2=2)$

- $\hat{C}_1 = c_1 - \lambda^T a_1 = -1 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1,$

- $\hat{C}_2 = c_2 - \lambda^T a_2 = -2 - (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2, k=2.$ (variável $x_{N2}=x_2$ entra na base)

- 2.3) {determinação da variável que entra na base}

- Como $\hat{C}_2 = \hat{C}_{N2} = \min\{\hat{C}_{Nj}, j=1,2\} = -2 < 0$, então a variável x_2 entra na base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração
 - Passo 3: {teste de otimalidade}
 - Como os custos relativos ($c_1=-1$, $c_2=-2$) são negativos, a solução atual não é ótima!
 - Passo 4: {cálculo da direção simplex}
 - Resolver o sistema $By=a_2$ e obtenha $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - O vetor y mostra como as variáveis básicas são alteradas: $x_B = \hat{x}_B - y\varepsilon$
 - As variáveis não-básicas (x_1 e x_2) se alteram conforme a estratégia simplex: $x_1=0$ e $x_2=\varepsilon$
 - Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}
 - $\hat{\varepsilon} = \min(\hat{x}_{B1}/y_1, \hat{x}_{B3}/y_3) = \min(6/1, 4/1) = 4 = \hat{x}_{B3} / y_3$
 - $x_{B3}=x_5$ sai da base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 1ª. Iteração

- Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a l-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N}

- $(B_1, B_2, B_3)=(3, 4, 2), \quad (N_1, N_2)=(1, 5),$

- {novo valor da função objetivo: $f(x)=f(\hat{x})+\hat{c}_{N_k}\hat{\varepsilon}=0-2*4=-8$ }

- Nova Tabela:

	Índices					
	Básicos			Não-básicos		
	B ₁ =3	B ₂ =4	B ₃ =2	N ₁ =1	N ₂ =5	b
[B N]	1	0	1	1	0	6
	0	1	-1	1	0	4
	0	0	1	-1	1	4
[c _B c _N]	0	0	-2	-1	0	f=-8

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª. Iteração

- Passo 1:

- Solução básica: $x_B = (x_3, x_4, x_2)$
 - Resolver sistema $Bx_B = b$ e obter $\hat{x}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

- Passo 2:

- 2.1) {vetor multiplicador simplex}
 - $(c_B = (c_{B1}, c_{B2}, c_{B3}) = (c_3, c_4, c_2) = (0, 0, -2))$.
 - Resolver sistema $B^T \lambda = c_B$ é $\lambda^T = (0, 0, -2)$
 - 2.2) {custos relativos}: ($N_1=1, N_2=5$)
 - $\hat{c}_1 = c_1 - \lambda^T a_1 = -1 - (0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3, k=1, x_1$ entra na base
 - $\hat{c}_5 = c_5 - \lambda^T a_5 = 0 - (0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$
 - 2.3) {determinação da variável que entra na base}
 - Como $\hat{c}_1 < 0$, solução básica não é ótima e x_1 entra na base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª. Iteração

- Passo 3: {teste de otimalidade}

- Como há custos relativos ($\hat{c}_1=-3, \hat{c}_5=2$) negativos, a solução atual não é ótima!

- Passo 4: {cálculo da direção simplex}

- Resolver o sistema $By=a_1$ e obtenha $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- O vetor y mostra como as variáveis básicas são alteradas: $x_B = \hat{x}_B - y\varepsilon$
 - As variáveis não-básicas (x_1 e x_5) se alteram conforme a estratégia simplex: $x_5=0$ e $x_1=\varepsilon$

- Passo 5: {determinação do passo e variável a sair da base}

- Como somente $y_1>0$, então
 - $\hat{\varepsilon} = \min(\hat{x}_{B1} / y_1) = \min(2/2) = 1$
 - $\hat{x}_{B1}=x_3$ sai da base

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 2ª. Iteração
 - Passo 6: {atualização: nova partição básica, troque a l-ésima coluna de B pela k-ésima coluna de N}
 - $(B_1, B_2, B_3)=(1, 4, 2), \quad (N_1, N_2)=(3, 5),$
 - {novo valor da função objetivo: $f(x)=f(\hat{x}) + \hat{c}_{N_k} \hat{\varepsilon} = -8 - 3 \cdot 1 = -11$ }
 - Nova Tabela:

	Índices					
	Básicos			Não-básicos		
	B ₁ =1	B ₂ =4	B ₃ =2	N ₁ =3	N ₂ =5	
[B N]	1	0	1	1	0	6
	1	1	-1	0	0	4
	-1	0	1	0	1	4
[c _B c _N]	-1	0	-2	0	0	f=-11

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 3ª. Iteração

- Passo 1:

- Solução básica: $x_B = (x_1, x_4, x_2)$
 - Resolver sistema $Bx_B = b$ e obter $\hat{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Passo 2:

- 2.1) {vetor multiplicador simplex}
 - $(c_B = (c_{B1}, c_{B2}, c_{B3}) = (c_1, c_4, c_2) = (-1, 0, -2))$.
 - Resolver sistema $B^T \lambda = c_B$ é $\lambda^T = (-3/2, 0, -1/2)$
 - 2.2) {custos relativos}: ($N_1=3, N_2=5$)
 - $\hat{c}_3 = c_3 - \lambda^T a_3 = 0 - (-3/2, 0, -1/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2,$
 - $\hat{c}_5 = c_5 - \lambda^T a_5 = 0 - (-3/2, 0, -1/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/2,$

Algoritmo Simplex (algébrico)

- Fase II: 3ª. Iteração
 - Passo 2:
 - 2.3) {determinação da variável que entra na base}
 - Como $\min\{\hat{c}_{N_j}, j=1,2\}=1/2>0$, segue-se que a solução atual

$$\text{» } \hat{x}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{e } \hat{x}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou } \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– É ótima!