

Algoritmo Simplex em Tabelas

Prof. Ricardo Santos

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Manipular problemas “pequenos” e compreender como o método funciona
- Considerar problema na forma padrão
- Coeficientes e função objetivo são organizados como:

x_1	x_2	...	x_n		variáveis
c_1	c_2	...	c_n	f	Coeficientes da func. objetivo
a_1	a_2	...	a_n	b	Coeficientes das restrições

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Dado o problema de PL:

- Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$

s.a. $x_1 + x_2 \leq 6$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- Como já sabemos, para transformar o problema anterior na forma padrão necessitamos inserir variáveis de folga:

$$x_3 = b_1 - (x_1 + x_2) = 6 - x_1 - x_2$$

$$x_4 = b_2 - (x_1 - x_2) = 4 - x_1 + x_2$$

$$x_5 = b_3 - (-x_1 + x_2) = 4 + x_1 - x_2$$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	-2	0	0	0	f
1	1	1	0	0	6
1	-1	0	1	0	4
-1	1	0	0	1	4

- Observe que as colunas de x_3 , x_4 e x_5 formam uma matriz identidade. x_3 , x_4 e x_5 são chamadas de variáveis básicas
- x_1 e x_2 são variáveis não-básicas

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	-2	0	0	0	f
1	1	1	0	0	6
1	-1	0	1	0	4
-1	1	0	0	1	4

- Fixando os valores de $x_1=x_2=0$, temos que:
 - $x_3=6$, $x_4=4$, $x_5=4$ e $f=0$
- Se mantermos $x_1=0$ e aumentarmos x_2 vemos que a função decresce. Logo, $x_1=x_2=0$ não é uma solução ótima

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Na estratégia simplex (alterar apenas uma variável não-básica), deve-se tomar o cuidado para manter a não-negatividade das variáveis de folga
- Considerando então $x_1=0$, podemos reescrever as variáveis de folga como:

$$x_3 = b_1 - (x_1 + x_2) = 6 - x_2 \geq 0$$

$$x_4 = b_2 - (x_1 - x_2) = 4 + x_2 \geq 0$$

$$x_5 = b_3 - (-x_1 + x_2) = 4 - x_2 \geq 0$$

- Das desigualdades anteriores, notamos que apenas x_3 e x_5 limitam o crescimento de x_2
 - Como $a_{12} > 0$, então $b_1 - a_{12}x_2 \geq 0$ implica $x_2 \leq b_1/a_{12}$, então $x_2 \leq 6$
 - Como $a_{32} > 0$, então $b_3 - a_{32}x_2 \geq 0$ implica $x_2 \leq b_3/a_{32}$, então $x_2 \leq 4$
 - Observe que $a_{22} < 0$, de forma que x_4 cresce junto com x_2
 - Se todos os $a_{i2} \leq 0$, $i=1,2,\dots,m$ então a variável x_2 crescerá indefinidamente de forma que $f \rightarrow -\infty$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Das observações anteriores, notamos que o maior valor para x_2 é 4 pois:
 - $x_2 = \min(b_1/a_{12}, b_3/a_{32}) = \min(6, 4) = 4$
 - Com esse valor, segue que $x_5 = 4 - x_2 = 4 - 4 = 0$. Assim, temos que:
 - Variáveis não-básicas: $x_1 = 0, x_2 = 4$
 - Variáveis básicas: $x_3 = 2, x_4 = 8, x_5 = 0$
 - Função objetivo: $f = -8$
- Se redefinirmos as variáveis não-básicas como aquelas com valores nulos e as variáveis básicas aquelas com valores positivos, temos que:
 - Variáveis não-básicas: $x_1 = 0, x_5 = 0$
 - Variáveis básicas: $x_3 = 2, x_4 = 8, x_2 = 4$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Se redefinirmos as variáveis não-básicas como aquelas com valores nulos e as variáveis básicas aquelas com valores positivos, temos que:
 - Variáveis não-básicas: $x_1=0$, $x_5=0$
 - Variáveis básicas: $x_3=2$, $x_4=8$, $x_2=4$
- Nesse caso, x_2 “entrou na base” e x_5 “saiu da base”
- As colunas das novas variáveis básicas não formam uma matriz identidade e, assim, a tabela simplex precisa ser atualizada
 - O que fizemos até agora (partir de uma solução factível e encontrar outra melhor) foi uma interação do método simplex

Algoritmo Simplex em Tabelas

- As operações realizadas em uma interação do simplex são:
 - Encontre variável não-básica que tenha o coeficiente negativo na função objetivo, por exemplo: x_k
 - Percorra a coluna na tabela simplex da variável x_k e, para cada coeficiente positivo ($a_{ik} > 0$), calcule a razão b_i/a_{ik} (valores que anulam a variável básica na linha i) e determine $b_l/a_{lk} = \min(b_i/a_{ik} \text{ tal que } a_{ik} > 0, i=1, \dots, m)$
 - Com $x_k = b_l/a_{lk}$, a variável básica na linha l se anula (isto é, sai da base). Se $a_{ik} < 0, i=1, \dots, m$ então $f \rightarrow -\infty$ e, nesse caso, pare (não tem solução ótima finita)
 - Redefina as variáveis básicas e não-básicas e reconstrua a tabela simplex para essa nova solução básica

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Antes de atualizar a tabela simplex, precisamos “pivotar” (aplicar eliminação de Gauss) a tabela anterior para que os coeficientes das variáveis não-básicas formem uma matriz identidade
 - Assim, a coluna de x_2 deve ser transformada na 3a. coluna da matriz identidade
- Tomemos o elemento 4,2 (intersecção entre x_2 e x_5) como pivô e aplicamos operações elementares sobre a tabela:
 - 1o. Definimos multiplicadores para cada linha:
 - $M_{12}=m_{12}/m_{42}=-2/1=-2$; $M_{22}=m_{22}/m_{42}=1/1=1$; $M_{32}=m_{32}/m_{42}=-1/1=-1$
 - 2o. Atualizamos cada linha i como:
 - $L_i=L_i-(m_{i2}.L_4)$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	0	0	0	2	$f+8$
2	0	1	0	-1	2
0	0	0	1	1	8
1	1	0	0	1	4

- Agora, observamos que a função objetivo é dada por
 - $f = -8 - 3x_1 + 2x_5$
- Se aumentarmos x_1 mantendo $x_5 = 0$, a função objetivo descreve na taxa de -3

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	0	0	0	2	$f+8$
2	0	1	0	-1	2
0	0	0	1	1	8
1	1	0	0	1	4

- Mantendo $x_5=0$, temos que:
 - $x_3=2-2x_1 \geq 0$
 - $x_4=8+0x_1 \geq 0$
- Note ainda que o valor máximo para $x_1=b_1/a_{11}=1$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- A Tabela Simplex fica então da seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	0	0	0	2	$f+8$
2	0	1	0	-1	2
0	0	0	1	1	8
1	1	0	0	1	4

- Note ainda que o valor máximo para $x_1 = b_1/a_{11} = 1$
- Com $x_1 = 1$, a variável básica x_3 se anula.
 - Variáveis não-básicas: $x_1 = 1$, $x_5 = 0$
 - Variáveis básicas: $x_3 = 0$, $x_4 = 8$, $x_2 = 4$

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Como há necessidade de atualizar a tabela simplex, escolhemos o elemento 1,1 como pivô e aplicamos operações elementares sobre a tabela de forma que:
 - Variáveis não-básicas: $x_3=0$, $x_5=0$
 - Variáveis básicas: $x_1=10$, $x_4=8$, $x_2=4$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	$3/2$	0	$3/2$	$f+11$
1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1
0	0	0	1	1	8
0	1	$1/2$	0	$1/2$	5

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Podemos reescrever as variáveis e função objetivo como:
 - $f = -11 + 3/2x_3 + 3/2x_5$, como $x_3 = x_5 = 0$, então **$f = -11$**
 - $x_1 = 1 - 1/2x_3 + 1/2x_5$
 - $x_4 = 8 - x_5$
 - $x_2 = 5 - 1/2x_3 - 1/2x_5$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	$3/2$	0	$3/2$	$f + 11$
1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1
0	0	0	1	1	8
0	1	$1/2$	0	$1/2$	5

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Note que os custos relativos (1a. Linha) de x_3 e x_5 são positivos. Logo, qualquer atribuição em x_3 ou x_5 faz $f(x) \geq -11$
- Então, $f(x) = -11$ é a solução ótima!

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	$3/2$	0	$3/2$	$f+11$
1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1
0	0	0	1	1	8
0	1	$1/2$	0	$1/2$	5

Algoritmo Simplex em Tabelas

- Podemos dividir o algoritmo Simplex em Tabelas em 2 fases:
 - Fase I: Determinar a tabela simplex inicial
 - Matriz de coeficientes contém uma matriz identidade $m \times m$ e o vetor independente b
 - Função objetivo é escrita em termos de variáveis não-básicas, isto é, coeficientes das variáveis básicas são nulos
 - Iteração=0
 - Fase II: Determinação das soluções em cada iteração
 1. Determine o menor dos custos relativos $c_k = \text{minimo}$ entre os coeficientes das variáveis não-básicas
 2. Se $c_k > 0$, então pare. Senão, c_k entra na base
 3. Se $a_{ik} \leq 0$, $i=1, \dots, m$, então pare (não existe solução ótima finita. Senão, determine: $b_l / a_{lk} = \text{minimo}(b_i / a_{ik} \text{ tal que } a_{ik} > 0, i=1, \dots, m)$. Variável básica da linha l sai da base
 4. Atualize a tabela simplex (pivotamente no elemento (l,k)). A variável x_k passa a ser a variável básica na linha l
 5. Iteração=Iteração+1
 6. Retorne passo 1