
Pesquisa Operacional

Tópicos em Programação Linear e Inteira

Prof. Dr. Ricardo Ribeiro dos Santos

ricr.santos@gmail.com

Universidade Católica Dom Bosco - UCDB

Engenharia de Computação

Roteiro

- Introdução e Histórico
- Modelagem Matemática
- Conceitos Básicos de PL
- Solução Gráfica
- Programação Linear e o Método Simplex
- Pesquisa Operacional e Mercado

Introdução e Histórico

Introdução

Pesquisa Operacional (PO) é um conjunto de técnicas matemáticas utilizadas para resolver problemas relacionados com a tomada de decisões.

Principais técnicas:

Programação Linear, Programação Não Linear, Programação Dinâmica, Programação Geométrica, Otimização Combinatória, Teoria de Filas, Teoria de Estoques, Teoria de Decisão, Simulação de Sistemas.

Introdução

Contribuição da Pesquisa Operacional

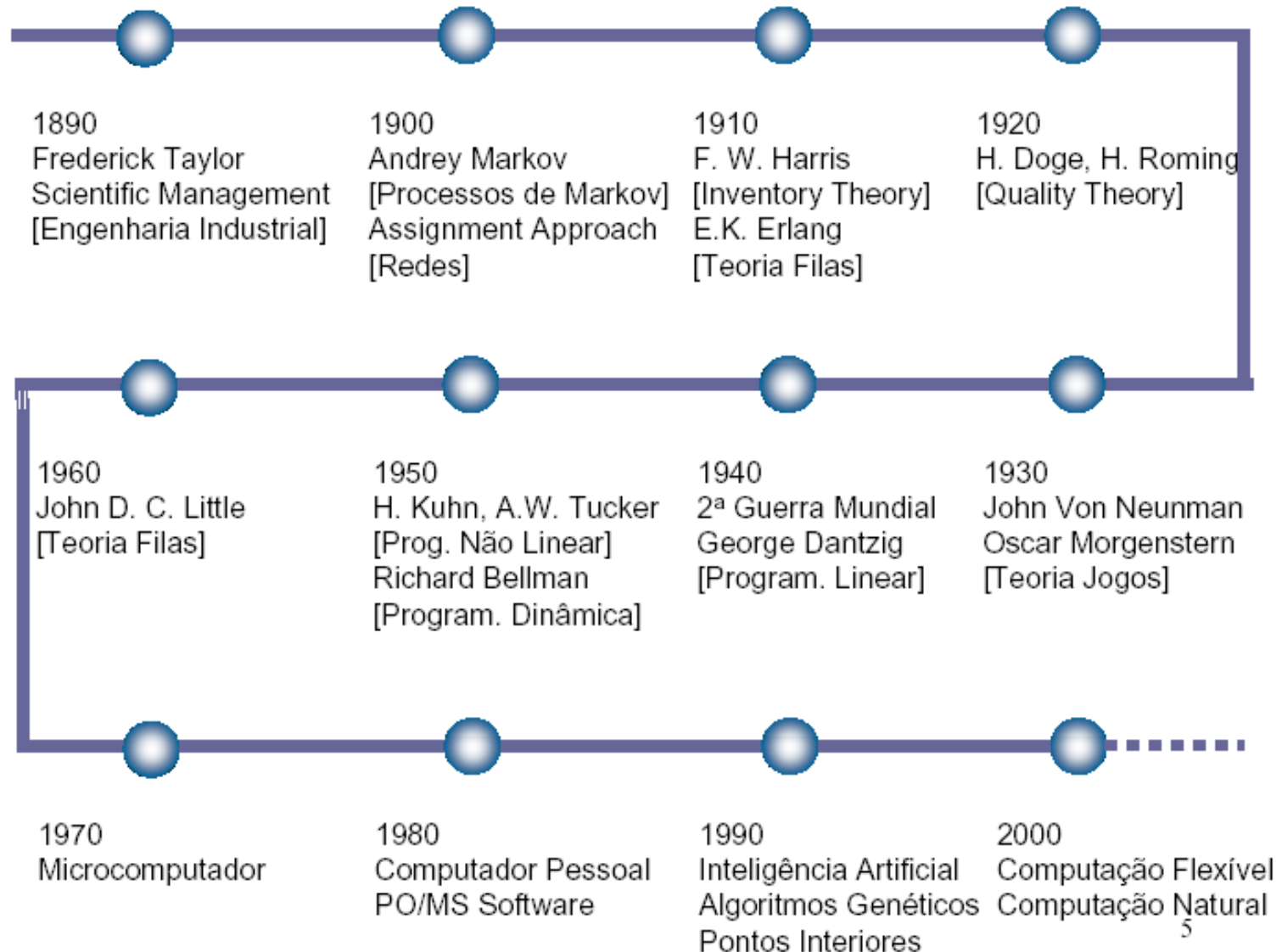
- Resulta na formulação de modelos matemáticos para problemas de diversas áreas.
- As técnicas empregadas envolvem a classificação dos problemas em **grupos** e a identificação de características das soluções ótimas, de modo a desenvolver métodos sistemáticos (ou algoritmos) para obtenção destas soluções.

Aplicações

- Roteirização de Veículos.
- Problemas de Corte.
- Problema de Empacotamento.
- Problemas de Manufatura.
- Escalonamento de Tarefas-Máquinas.
- Planejamento de Produção.
- Projeto de Circuitos Integrados.
- Problema de Engenharias em geral .

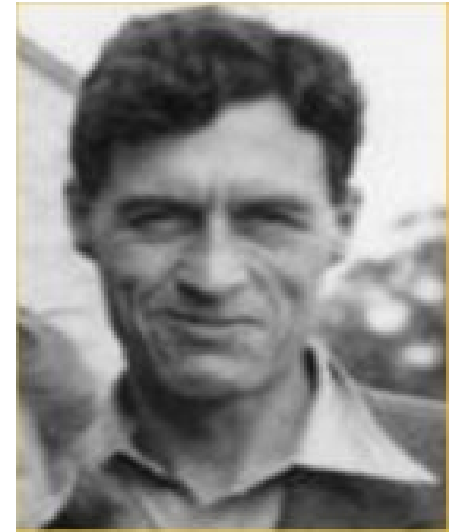


Histórico



Histórico

O termo **Pesquisa Operacional** (Operational Research na Inglaterra, Operations Research nos EUA, Investigação Operacional em Portugal e Investigación Operativa em países hispânicos) foi usado pela primeira vez em **1938** para designar o estudo sistemático de problemas estratégicos e táticos decorrentes de operações militares.



Um grupo de especialistas (**Patrick Blackett**, Cecil Gordon, C. H. Waddington, Owen Wansbrough-Jones and Frank Yates) foi designado para avaliar e reposicionar os radares do sistema de defesa aérea da Grã-Bretanha antes e durante a Segunda Guerra Mundial.

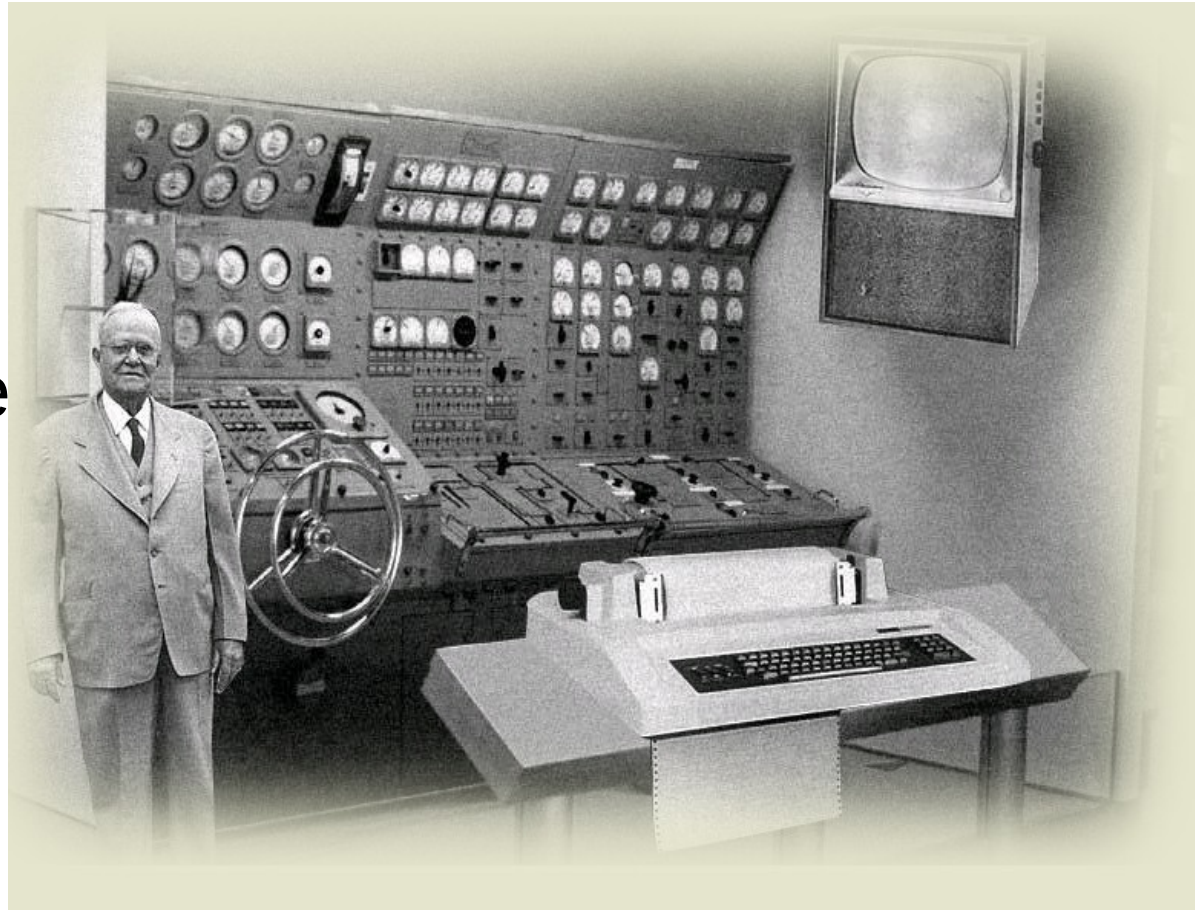
Histórico

O desenvolvimento metodológico mais importante do período pós-guerra foi o **Método Simplex**, por George Dantzig, em **1947**, para a resolução de problemas de Programação Linear.



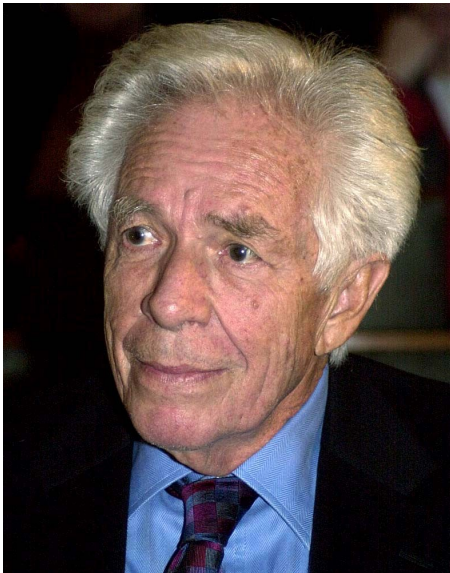
Histórico

Em 1952, Dantzig começou a sua **pesquisa matemática**, onde começou a implementar a programação linear.



Histórico

As condições de **KKT** (William **K**arush-Harold **K**uhn-Albert **T**ucker), publicadas na década de **1950**, são condições necessárias e suficientes para a solução ótima de problemas de programação não-lineares



Histórico

No Brasil, a PO iniciou na década de 1960.

- O primeiro Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO) foi realizado em 1968 no ITA e incluía alguns pesquisadores do país.
- Em seguida, foi criada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO).



Etapas da PO

O processo de aplicação da PO na solução de um problema:

Estudar o problema

ter contacto com o problema para compreender e detalhar as suas características principais; é uma etapa de coleta de dados

Identificar sistema

descrever atividades, recursos, restrições e objetivos

Construir modelo

desenvolver um modelo que represente de modo simplificado o sistema em estudo

Etapas da PO

Executar método

utilizar método matemático para obter a solução matemática para o problema.

Analisar solução

estudar a estabilidade da solução frente a pequenas variações no meio ambiente; transformar a solução matemática em uma solução do problema real.

Tomar decisão

implementar a solução no sistema real.

Realimentar

corrigir ou refazer trabalho anterior com base em erros detectados, presente em todas as etapas anteriores.

Conceitos Preliminares e Exemplos de Modelos de PO

Conceitos Preliminares

Um **modelo matemático** para o problema de decisão.

**otimizar (função-objetivo)
sujeito a (restrições)**

Variáveis de decisão: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, é possível expressar tanto a função-objetivo como as restrições em termos de x .

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$, funções de n variáveis, a primeira associada à f.o. e as demais às restrições do modelo.

Denotando por " $\sim$ " qualquer das relações "=", "<", ">", obtém-se:

**otimizar $f(x)$
sujeito a $g_1(x) \sim b_1$;
 $g_2(x) \sim b_2$;
...
 $g_p(x) \sim b_p$; (b_i , $i = 1, 2, \dots, p$ valores constantes).**

Probleminha

Uma agroindústria, deve produzir um tipo de ração para determinado animal. A ração é produzida pela mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e resto de peixe. Cada ingrediente possui diferentes quantidades de dois nutrientes: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração: 30% de proteína e 50% de cálcio (**pelo menos**).

Objetivo

determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o **mínimo custo**.

Probleminha

Nutrientes	Ingredientes			
	Osso	Soja	Peixe	Ração
Proteína	0.2	0.5	0.4	0.3
Cálcio	0.6	0.4	0.4	0.5
Custos (\$/kg)	0.56	0.81	0.46	

Construindo o Modelo

- **variável de decisão** x_j como a quantidade (em kg) do ingrediente j que deve ser usada em uma unidade (1kg) de ração, $j=1$ (osso), 2 (soja), 3 (peixe).
- o **custo** da mistura será dado por:
$$f(x_1, x_2, x_3)=0.56x_1+0.81x_2+0.46x_3$$
- as **restrições** são dadas por:
$$\begin{aligned}0.2x_1+0.5x_2+0.4x_3 &\geq 0.3 \\ 0.6x_1+0.4x_2+0.4x_3 &\geq 0.5 \\ x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

Construindo o Modelo

O modelo matemático resultante é:

Minimizar $f(x_1, x_2, x_3) = 0.56x_1 + 0.81x_2 + 0.46x_3$

Sujeito a

$$0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 \geq 0.3$$

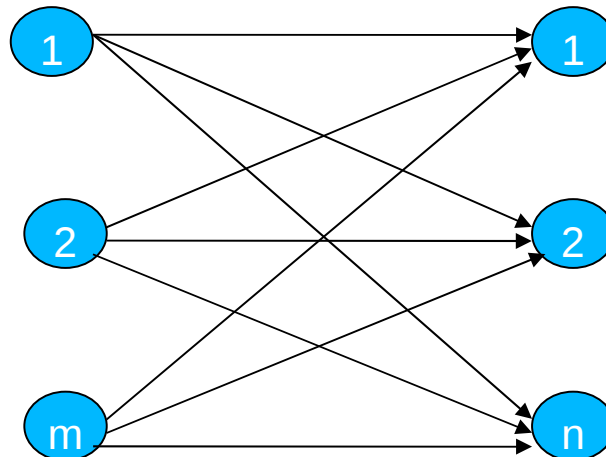
$$0.6x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 \geq 0.5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Problema do Transporte

- Centros de produção de produtos são denominados origens
- Mercados consumidores são denominados destinos
- Supor a existência de **m** origens e **n** destinos e o custo de transporte de uma unidade do produto da origem *i* para o destino *j* é **c_{ij}**
- Oferta do produto na origem *i* é **a_i** e a demanda do produto no destino *j* é **b_j**



Problema do Transporte

- x_{ij} quantidade transportada da origem i para o destino j .
- $c_{ij}x_{ij}$ é o custo para realizar o transporte de i para j com a quantidade x de produtos com o custo c .
- O **custo total** de transporte é a soma dos custos de transporte de todas as quantidades transportadas de todas as origens i a todos os destinos j . Esse custo deve ser minimizado.
- Observe que:
 - O que é transportado de cada origem i a todos os destinos j não pode ultrapassar a quantidade ofertada em i .
 - As quantidades transportadas das diversas origens ao destino j satisfaçam a demanda requerida neste destino.

Como seria o modelo de PO para esse problema?

Problema do Transporte

- Modelo Matemático de PO

$$\text{Minimizar } f(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

Problema do Transporte

Considere uma distribuidora de bebidas com 2 centros de distribuição: Paranaíba e Sonora e quatro mercados consumidores principais: Campo Grande, Dourados, Corumbá e Três Lagoas. O custo unitário para transportar uma unidade do produto de cada centro de produção a cada mercado é dado na Tabela a seguir:

Centro de distribuição	Mercado				Suprimento disponível
	CGrande	Dourados	Corumbá	TLagoas	
Paranaíba	5	7	10	4	950
Sonora	5	8	7	11	1200
Demanda	900	500	300	350	

Problema do Planejamento de Produção

- Esses problemas envolvem decidir **quais** produtos e **quanto** fabricar de cada produto em um período visando a maximizar lucro da empresa.
- Considere x_j a quantidade do produto $j=1,2,\dots, n$ a ser produzida em um período de planejamento.
- Seja C_i , $i=1,2,\dots,m$ a capacidade do recursos disponível no período.
- Para produzir o produto j , são consumidas a_{ij} unidades do recurso i .
- Uma produção mínima do produto j , digamos d_j , precisa ser realizada no período.
- As vendas do produto não excedem v_j unidades no período em estudo.
- Cada unidade do produto j resulta em uma contribuição ao lucro de l_j para a empresa.

Problema do Planejamento de Produção

- O problema do Planejamento de Produção

$$\text{Maximizar } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n l_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq C_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_j \leq x_j \leq v_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Modelo Matemático

O modelo matemático do problema da ração é:

Minimizar $f(x_1, x_2, x_3) = 0.56x_1 + 0.81x_2 + 0.46x_3$

Sujeito a

$$0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 \geq 0.3$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 \geq 0.5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Método Simplex

- É um procedimento matricial para resolver o **modelo de programação linear** na forma padrão.
- O método localiza sucessivamente outras soluções básicas viáveis acarretando melhores valores para a função objetivo até ser obtida a **solução ótima** encontrada.
- É um método de direções factíveis que pode ser denominado **método de pontos extremos**, uma vez que cada iteração está associada a um ponto extremo (solução básica factível) do conjunto de soluções factíveis.

Métodos de Pontos Interiores

- MPI são métodos de direcções factíveis, porém cada iteração está associada a um **ponto interior** do conjunto de soluções factíveis.
- Cada iteração de um MPI requer um número maior de operações computacionais, porém o número de iterações é menor, isto se torna uma vantagem na resolução de problemas de grande porte.
- O MPI consegue obter um melhor desempenho computacional para **problemas de grande porte** em comparação aos métodos clássicos, por exemplo, o método simplex.

Métodos Heurísticos

- Métodos heurísticos procuram um compromisso entre o **desempenho** na obtenção de uma solução e a **qualidade** da solução.
- A qualidade da solução é medida por meio da aplicação de uma métrica entre o valor obtido e o valor da solução ótima.
- Devido à complexidade dos problemas de **Otimização Combinatória**, trabalha-se com métodos heurísticos para alcançar resultados aceitáveis num tempo **computacional viável**.

Métodos Heurísticos

- Heurística vem do grego *Heuriskein* significa descobrir, não tem prova de convergência e não garante achar solução ótima.
- Procedimento para resolver problemas através de um enfoque *intuitivo*, em geral racional, no qual a estrutura do problema possa ser interpretado e explorado inteligentemente para obter uma solução razoável.

Exemplos:

Heurística de Construção, Heurística de Melhoria, *Simulated Annealing*, Algoritmo Genético, Algoritmo Memético, Busca Tabu, Grasp, Algoritmos Aproximados, Algoritmos Probabilístico e etc.

Pesquisa Operacional & Mercado

Consultoria em Pesquisa Operacional



Não sabe onde estão as empresas de Mato Grosso do Sul?



Onde Encontrar os Conhecimentos de Pesquisa Operacional?

