

1ª Lista de Exercícios
(Programação Linear: Modelagem, Método Gráfico e Método Simplex)

1) Uma determinada confecção opera com dois produtos calças e camisas. Como tratam-se de produtos semelhantes, possuem uma produtividade comparável e compartilham os mesmos recursos. A programação da produção é realizada por lotes do produto.

O departamento de produção informa que são necessários 10 homens x hora para um lote de calças e 20 homens x hora para um lote de camisas. Sabe-se que não é necessária mão de obra especializada para a produção de calças, mas são necessárias 10 homens hora desse tipo de mão de obra para produzir um lote de camisas. O departamento pessoal informa que a força máxima de trabalho disponível é de 30 homens hora de operários especializados e de 50 homens hora não especializados.

Da planta de produção, sabemos que existem duas máquinas com capacidade para produzir os dois tipos de produto; sendo que a máquina 1 pode produzir um lote de calças a cada 20 horas e um lote de camisas a cada 10 horas, não podendo ser utilizada por mais de 80 horas no período considerado.

São necessários dois tipos de matéria prima para produzir calças e camisas. Na produção de um lote de calças são utilizados 12 quilos da matéria prima A e 10 da B. Na produção de um lote de camisas são utilizados 8 quilos da matéria prima A e 15 da B.

O almoxarifado informa que por imposições de espaço, só pode fornecer 120 quilos de A e 100 quilos de B no período considerado.

Sabendo-se que o lucro pela venda é de 800 reais nos lotes das camisas e de 500 nos lotes das calças. Formule o problema e maximize o lucro da operação produtiva em pauta.

2) Uma empresa administradora agrícola deve decidir o quanto vai plantar de cana-de-açúcar e algodão. Os lucros são de R\$ 2.000,00 por alqueire de cana-de-açúcar e de R\$ 1.000,00 por alqueire de algodão. Suponha que suas limitações sejam: terra disponível é de 8 alqueires e água disponível para irrigação de 80.000 litros sendo que deseja-se plantar no máximo 4 alqueires de cana-de-açúcar. Cada alqueire de cana-de-açúcar requererá 10.000 litros de água para irrigação e cada alqueire de algodão requererá 20.000 litros de água. Modele e resolva o problema.

3) Resolva novamente o problema anterior supondo que seja requerido que mais de 50% do total cultivado sejam plantados com algodão.

4) Uma companhia de armazéns tem 1200 dólares para alocar a um de seus armazéns. Três produtos 1, 2 e 3 exigem 30, 3 e 15 m² de espaço por unidade, respectivamente. Há 1500 m² de espaço disponível. O produto 1 custa 12 dólares, o produto 2 custa 4,50 dólares e o produto 3 custa 17 dólares. Quanto de cada produto deve ser comprado se os preços de venda dos produtos 1, 2 e 3 são, respectivamente, de 15, 6 e 21 dólares, de modo a maximizar o lucro? Formule o problema.

5) A administração de uma fazenda está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

a) Arrendamento - Destinar certa quantidade de alqueires Para a plantação de cana de açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra R\$ 300,00 por alqueire por ano;

b) Pecuária - Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/alqueire) e irrigação (100.000 litros de água/alqueire) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R\$400,00 por alqueire por ano.

c) Plantio de Milho - Usar uma terceira parte para o plantio de milho. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 litros de água por alqueire para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R\$ 500,00 por alqueire por ano. A disponibilidade de recursos por ano é de 12.750.000 litros de água, 14.000 kg de adubo e 100 alqueires de terra. Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno?

6) Três produtos químicos derivados do petróleo P1, P2 e P3 são utilizados na produção de dois tipos de óleo para motor M1 e M2. Conhecemos as composições percentuais das misturas (tabela Q1), a disponibilidade de P1, P2 e P3 (tabela Q2) e os lucros unitários da venda de cada um dos dois tipos de óleo para motor (tabela Q3). Deseja-se saber como planejar a produção de modo a maximizar o lucro total. Pode-se imaginar aqui que se trata do planejamento mensal da firma, em função de um fornecimento conhecido e dos preços e custos estabelecidos (ou previstos) para o período. Admite-se que o mercado tem capacidade para absorver toda a produção.

Quadro Q1 -				Quadro Q2 - Estoque em galões				Quadro Q3 - Lucro em R\$ por galão		
	P1	P2	P3		P1	P2	P3		M1	M2
M1	30	50	20							
M2	60	15	25		9000	7500	4000		12	10

7) Uma pequena fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos A, B e C. A fábrica recebe o papel em grandes rolos. O papel é cortado, dobrado e empacotado. Dada a pequena escala da fábrica, o mercado absorverá qualquer produção a um preço constante. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R\$ 1,00, R\$ 1,50, e R\$ 2,00. O quadro abaixo identifica o tempo requerido para operação (em horas) em cada seção da fábrica, bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana. Planeje a produção semanal da fábrica.

Seção	Produto A	Produto B	Produto C	Q ^{de} . Máquina
Corte	8	5	2	3
Dobra	5	10	4	10
Empacotamento	0,7	1	2	2

8) Um fundo de investimentos tem até R\$ 300.000,00 para aplicar em duas ações. A empresa D é diversificada (tem 40% do seu capital aplicado em cerveja e o restante aplicado em refrigerantes) e espera-se que forneça bonificações de 12%. A empresa N não é diversificada (produz apenas cerveja) e espera-se que distribua bonificações de 20%. Para este investimento, considerando a legislação governamental aplicável, o fundo está sujeito às seguintes restrições:

- O investimento na empresa diversificada pode atingir R\$ 270.000,00.
- O investimento na empresa não-diversificada pode atingir R\$ 150.000,00.
- O investimento em cada produto (cerveja ou refrigerante) pode atingir R\$ 180.000,00.

Pede-se: Qual o esquema de investimento que maximiza o lucro?

9) Um criador de animais de pequeno porte alimenta os animais com cinco tipos de ração, cuja composição de nutrientes (unidades/Kg) está mostrada abaixo:

Nutrientes	Ração A	Ração B	Ração C	Ração D	Ração E
Proteínas	30	20	15	80	20
Carboidratos	60	20	60	20	20
Gordura	5	10	5	3	2
Custo/Kg	0,20	0,30	0,40	0,50	0,25

O criador calculou as necessidades diárias de alimentação de cada animal em, pelo menos, 80 unidades de proteína, 120 unidades de carboidratos e 30 unidades de gordura. Qual deve ser a mistura das rações acima a custo mínimo?

10) Uma fábrica de computadores produz dois modelos de microcomputadores A e B. O modelo A fornece um lucro de R\$ 180,00 e B, de R\$ 300,00. O modelo A requer, na sua produção, um

gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque 60 do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Pergunta-se: Qual deve ser o esquema de produção que maximiza o lucro?

11) Uma empresa produz televisão em 3 fábricas: São Paulo, João Pessoa e Manaus. Os pontos principais de revenda, com as respectivas encomendas mensais são:

Rio de Janeiro	6.000 unidades
Salvador	5.000 unidades
Aracajú	2.000 unidades
Maceió	1.000 unidades
Recife	3.000 unidades

A produção máxima mensal em cada fábrica é:

São Paulo	10.000 unidades
João Pessoa	5.000 unidades
Manaus	6.000 unidades

O custo de transportes das fábricas até as revendas é dado pelo quadro abaixo:

R\$ por 1.000 unidades de TV

De/Para	Rio de Janeiro (1)	Salvador (2)	Aracaju (3)	Maceió (4)	Recife (5)
(1) São Paulo	1.000	2.000	3.000	3.500	4.000
(2) João Pessoa	4.000	2.000	1.500	1.200	1.000
(3) Manaus	6.000	4.000	3.500	3.000	2.000

Determinar o número de unidades produzidas em cada fábrica e entregues a cada revenda, a fim de minimizar o custo de transporte.

12) Uma central industrial de reciclagem usa dois tipos de sucata de alumínio, A e B, para produzir uma liga especial. A sucata A contém 6% de alumínio, 3% de silício e 4% de carbono. A sucata B tem 3% de alumínio, 6% de silício e 3% de carbono. Os custos por tonelada das sucatas A e B são R\$ 100,00 e R\$ 80,00, respectivamente. As especificações da liga especial requerem que 1) o teor de alumínio deve ser no mínimo 3% e no máximo 6%; 2) o teor de silício deve ficar entre 3% e 5%; e 3) o teor de carbono deve ficar entre 3% e 7%. Determine o mix ótimo (de mínimo custo) de sucatas que deve ser usado para produzir 1000 toneladas da liga.

13) Resolver graficamente e fornecer os valores ótimos para as variáveis dos problemas a seguir:

a) Maximizar $4x_1 + 6x_2$

s.a $8x_1 + 7x_2 \leq 56$
 $x_2 \leq 5$
 $x_1 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

b) Minimizar $2x_1 + x_2$

s.a $x_1 + x_2 \geq 10$
 $2x_1 + 3x_2 \geq 14$
 $x_1, x_2 \geq 0$

c) Maximizar $3x_1 + x_2$

s.a $2x_1 + x_2 \leq 30$
 $x_1 + 4x_2 \leq 40$
 $x_1, x_2 \geq 0$

d) Maximizar $3x_1 + 5x_2$

s.a $x_1 \leq 4$
 $2x_2 \leq 12$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
 $x_1 \geq 0$
 $x_2 \geq 0$

e) Maximizar $-2x_1 - 2x_2$

s.a $3x_1 - 4x_2 \leq 18$
 $8x_1 - 3x_2 \leq -24$
 $6x_1 + 8x_2 \leq 24$
 $3x_1 + 5x_2 \leq 21$
 $x_1 \leq 3$
 $x_2 \geq 0$

f) Maximizar $-2x_1 - 5x_2$

s.a $2x_1 - 2x_2 \leq 10$
 $7x_1 + 3x_2 \geq -21$
 $-2x_1 + 3x_2 \geq -6$
 $3x_1 + 9x_2 \leq 27$
 $x_1 \geq -1$

$$x_2 \geq -4$$

14) Na fabricação de dois de seus produtos, uma empresa utiliza dois equipamentos que limitam a produção. Em um dado período de tempo, estão disponíveis 30h do equipamento 1 e 80h do equipamento 2. Para a fabricação de uma unidade do produto A, usa-se 1 hora do equipamento 1 e 2 horas do equipamento 2. Já para uma unidade do produto B, são gastas 2 horas do equipamento 2. O equipamento 1 não toma parte na produção do produto B. Uma unidade do produto A produz um lucro de R\$ 150,00, enquanto que cada unidade do produto B gera um lucro de R\$ 50,00.

- a) Formular o problema de PL que maximiza o lucro
- b) Resolver graficamente.

15) Na fabricação de dois produtos, X e Y, as seguintes restrições são válidas quanto aos dois recursos escassos que são utilizados:

$$x + 2y \leq 80$$

$$2x + 2y \leq 120$$

x= número de unidades produzidas do produto X

y= número de unidades produzidas do produto Y

Sabe-se também que cada unidade do produto X fornece um lucro de R\$ 20,00 e cada unidade do produto Y leva a um lucro de R\$ 30,00.

- a) Formular o modelo de PL que maximiza o lucro
- b) Resolver o problema graficamente.

16) Usando a função **linprog** do Matlab resolve os seguintes problemas de PL. Caso exista solução ótima, forneça o valor ótimo e o valor avaliado nos pontos. Caso não existe uma solução ótima, justifique.

a) Maximizar $2x_1 + 5x_2 + 2x_3$

$$\text{s.a } 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 \leq 600$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 162$$

$$2x_1 + 5x_3 \leq 700$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

b) Maximizar $2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.a } x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

c) Minimizar $x_1 + 4x_2$

s.a $x_1 + 2x_2 \leq 75$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

17) No problema a seguir (já visto em sala):

$$\text{Maximizar } f(x_{\text{luxe}}, x_{\text{basico}}) = 100x_{\text{luxe}} + 50x_{\text{basico}}$$

s.a. $10x_{\text{luxe}} + 8x_{\text{basico}} \leq 25.000$

$$x_{\text{luxe}} + x_{\text{basico}} \leq 4.500$$

$$0 \leq x_{\text{luxe}} \leq 1.500 \text{ e } 0 \leq x_{\text{basico}} \leq 6.000$$

a) Represente a região factível com um plano cartesiano e determine a solução ótima

b) Escreva o problema na forma padrão

c) Aplique o método simplex, considerando a base inicial (partição B para a 1ª. iteração) formada pelas colunas das variáveis de folga e determine a solução ótima.

d) Calcule o vetor multiplicador simplex $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ para cada iteração do método simplex. Utilize o MatLab para realização dos cálculos (Utilize C' (linha) para calcular a transposta da matriz C e $\text{inv}(C)$ para calcular a inversa de C). Obs: Note que: c_B^T são as constantes das variáveis que pertencem à partição básica na função objetivo e que B^{-1} é a inversa da matriz formada pelos coeficientes das variáveis que estão na partição básica. Como exemplo:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

s.a $x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$$x_1 + x_4 = 3$$

$$x_2 + x_5 = 7/2$$

Considerando que a partição inicial é formada por $B = [a_1 \ a_2 \ a_5]$ e $N = [a_3 \ a_4]$ ou seja:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, observe que as variáveis x_1 , x_2 e x_5 foram escolhidas como básicas. Assim:

$C_B^T = (-2 \ -1 \ 0)$ que, como pode ser observado, são os coeficientes das variáveis da partição básica na função objetivo.

18) Uma cooperativa de laticínios fabrica três produtos: leite pasteurizado, queijo fresco e iogurte. A cooperativa recebe diariamente 100 mil litros de leite, os quais devem ser processados no mesmo dia. Há um compromisso de abastecer o mercado diário de no mínimo 50 mil litros de leite

pasteurizado, cuja contribuição ao lucro é de R\$ 0,07/litro. Um kg de queijo fresco consome 10 litros de leite, enquanto um litro de iogurte consome 2,5 litros de leite. As contribuições ao lucro são: queijo – R\$ 1,04/kg de queijo e iogurte – R\$ 0,20/litro de iogurte. O máximo que o mercado assimila diariamente de cada produto é de 60 mil litros de leite pasteurizado, 3500 kg de queijo e 20 mil litros de iogurte. Determinar as quantidades ideais de cada produto de modo a maximizar o lucro.

19) Considere uma fábrica de pré-moldados que produz dois tipos de vigas cujas demandas para os próximos 3 períodos de venda são dados:

Demanda de vigas	Período 1	Período 2	Período 3
Item 1	100	90	120
Item 2	40	50	80

Os produtos utilizam os mesmos tipos de recursos, porém em quantidades diferentes. Um centro de trabalho está disponível para a produção dos dois itens e cuja disponibilidade é de 40h por período e que cada unidade do item 1 utiliza 15 minutos e cada unidade do item 2 necessita de 20 minutos. Os custos de produção por período são dados na tabela:

Custos de produção	Período 1	Período 2	Período 3
Item 1	20	20	30
Item 2	20	20	30

Admite-se que a produção possa ser antecipada e estocada para ser utilizada nos períodos seguintes. Os custos de estocagem são dados a seguir (por exemplo, uma unidade do item 1 pode ser produzida no período 2 e guardada em estoque para atender a demanda do período 3 por R\$ 3,00/unidade).

Custos de estocagem	Período 1	Período 2
Item 1	2	3
Item 2	2,5	3,5

O objetivo é definir um plano de produção de modo que os pedidos sejam atendidos ao menor custo de produção e estocagem. Os estoques iniciais são nulos e, ao final do horizonte de planejamento (período 3), também sejam nulos.

20) Uma indústria de papel produz bobinas-jumbo de L=400cm de largura e cada uma pesa T=1 tonelada. Os jumbos devem ser cortados em bobinas menores nas larguras e quantidades

apresentadas na tabela a seguir, conforme solicitação de diversos clientes. O objetivo então é minimizar o número de bobinas cortadas em cada padrão de corte.

Dados da Demanda	
Larguras	Quantidades
40cm	5 toneladas
45cm	3,5 toneladas
55cm	4 toneladas
60cm	5 toneladas