Pesquisa Operacional Introdução, Histórico e Conceitos Básicos

Prof. Ricardo Santos

Introdução

- **Pesquisa Operacional (PO)** engloba um conjunto de técnicas direcionadas a problemas complexos voltados para a tomada de decisões em empresas
- O **ponto chave** da PO reside na **construção de modelos matemáticos** a partir dos quais, escolhe-se uma técnica adequada para resolução
- Exemplos de problemas onde a PO se mostra bastante atrativa são: determinação de custo mínimo para produção, maximização de lucros, maximização de utilização de equipamentos, redução de desperdícios de produtos, problemas de corte, empacotamento, transporte, rotas, entre outros.

Histórico

- O termo Pesquisa Operacional (*Operational Research* na Inglaterra, *Operations Research* nos EUA, *Investigação Operacional* em Portugal e *Investigación Operativa* em países hispânicos) foi usado pela primeira vez em 1938 para designar o estudo sistemático de problemas estratégicos e táticos decorrentes de operações militares

  - Um grupo de especialistas (entre eles: Patrick Blackett, Cecil Gordon, C. H. Waddington, Owen Wansbrough-Jones and Frank Yates) foi designado para avaliar e reposicionar adequadamente os radares do sistema de defesa aérea da Grã-Bretanha antes e durante a Segunda Guerra Mundial. Outras aplicações militares incluiram o planejamento de operações de comboios, bombardeios e de guerra anti-submarina

Histórico

- O desenvolvimento metodológico mais importante do período pós-guerra foi o **Método Simplex**, por George Dantzig, em 1947, para a resolução de problemas de Programação Linear, isto é, de problemas de planejamento nos quais são utilizados modelos de otimização lineares

Histórico

- No Brasil, a PO iniciou, basicamente, na década de 1960
  - O primeiro Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO) foi realizado em 1968 no ITA e incluia alguns pesquisadores do país (Oswaldo Fadigas Fontes Torres, Alberto Ricardo Von Ellenrieder, Roberto Gomes da Costa, Ruy Vianna Braga, Alfredo Otto Brockmeyer, Mario Rosenthal, Ricardo Augusto França Leme, Sergio Ellery Girão Barroso, Ramiro de A. Almeida Sobrinho, Joanilio Rodolpho Teixeira, Sigfrido Carlos Mazza, Nelson Ortegosa da Cunha, Antonio Salles Campos Filho, Celso Pascoli Bottura, Luiz José Fabiani, Itiro Iida, Claus Warzharier, Sergio Grinberg, Pedro Rodrigues Bueno Neto, Sergio Viana Domingues e Israel Grystz)
  - Em seguida, foi criada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO)

XL SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL

SOBRAPO

Conceitos Básicos

- O **tipo** e a **complexidade** do modelo matemático de PO são os responsáveis por determinar o método de solução
- Uma técnica adotada é a **programação linear** que é aplicada a modelos cujas funções objetivo e restrições são lineares
- Outras técnicas são: **programação inteira**, **programação dinâmica**, **otimização em redes**, **programação não-linear**, **programação multiobjetivo**, **teoria de jogos**, entre outras
- Uma peculiaridade das técnicas de PO é que a maioria delas obtêm soluções através de **algoritmos**
- Em alguns casos há, inclusive, a necessidade de adotar **heurísticas** a fim de obter soluções em tempo viável

Conceitos Básicos

- Os modelos de PO são elaborados para "**otimizar**" um critério objetivo específico sujeito a um conjunto de restrições
- A qualidade da solução resultante depende de quanto o modelo representa o sistema real
- Uma solução é **viável** se satisfazer todas as restrições do modelo
- Uma solução é **ótima** se, além de ser viável, resultar no melhor valor (máximo ou mínimo) para o modelo especificado

Conceitos Básicos

- Fases para implementação da PO: Definição do Problema
    - Define o escopo do problema sob investigação. A meta é identificar três elementos primordiais: descrição das alternativas de decisão, determinação do objetivo do estudo e especificação das limitações do sistema

Conceitos Básicos

- Fases para implementação da PO: Construção do Modelo
  - A construcão de um modelo começa pela adoção de uma notação apropriada para as principais quantidades presentes na denição do problema. É comum denotar por x_1, x_2, ... , x_n as (por hipótese) **n** quantidades manipuladas do problema. Dá-se o nome de **variáveis de decisão** a estas quantidades
  - O passo seguinte é redefinir matematicamente o problema por meio de fórmulas, relações matemáticas ou proposições. Uma fórmula denominada de **funcão-objetivo** e utilizada para descrever como o objetivo do problema e influenciado pelos valores das variáveis de decisão

Conceitos Básicos

- Fases para implementação da PO: Construção do Modelo
  - Relações matemáticas envolvendo os símbolos "=", “<", “>" e proposições gerais são empregadas para descrever eventuais **restrições** para a escolha de valores para as variáveis de decisão
  - Os modelos matemáticos normalmente adotados para problemas de planejamento são **prescritivos**
  - A prescrição quase sempre é **otimizar** a função-objetivo sujeito as restrições, sendo que otimizar pode significar **minimizar** ou **maximizar**, isto é, determinar os valores das variáveis de decisão que conduzem ao menor ou maior valor para a função-objetivo

Conceitos Básicos

- Fases para implementação da PO: Construção do Modelo
  - Um modelo sintético, prescritivo, para o problema de decisão seria:
    - otimizar (função-objetivo)
    - sujeito a (restrições)
  - Representando as variáveis de decisão por meio do vetor n-dimensional x =(x1, x2, ..., xn), é possível expressar tanto a função-objetivo como as restrições em termos de x. Sejam $f : R^n \rightarrow R$ e $g_i : R^n \rightarrow R$, i = 1, 2,..., p, funções de n variáveis, a primeira associada à função-objetivo e as p seguintes às restrições do modelo. Denotando por "~" qualquer das relações "=", "<", ">", obtém-se o modelo prescritivo na forma simbólica
    - otimizar f(x)
    - sujeito a g1(x)~1 b1;

$$
\begin{aligned}
& g_1(x) \sim_1 b_1; \\
& g_2(x) \sim_2 b_2; \qquad (1.1) \\
& \ldots \\
& g_p(x) \sim_p b_p;
\end{aligned}
$$

  - no qual bi, i = 1, 2, ..., p são valores constantes. É comum referir-se a (1.1) como modelo ou problema de otimização associado ao problema de decisão.

Conceitos Básicos

- Fases para implementação da PO: Solução do Modelo
  - Vetores x = (x1, x2,..., xn) de variáveis de decisão representam possíveis soluções para o problema de otimizacão (1.1)
  - Uma solução é viavel se satisfaz todas as restrições do problema. Uma solução é ótima se produz o menor (maior) valor para a função-objetivo
  - Um método é exato quando é capaz de gerar uma solução ótima $x^* = (x^*_1, x^*_2,..., x^*_n)$ para o problema (1.1)

Conceitos Básicos

- Fases para implementação da PO: Validação do Modelo
  - Este etapa do processo envolve verificar se o modelo adotado e a solução obtida por meio dele são compatíveis com a realidade do problema. Se todas as características relevantes do problema tiverem sido levadas em conta na modelagem, a solução obtida será implementável.
    - Caso contrário, um novo ciclo de modelagem e obtenção de solução terá de ser desenvolvido.
  - Um método comum para verificar a validade de um modelo é comparar seus resultados com dados históricos
  - Pode-se também usar a simulação como ferramenta independente para verificar os resultados do modelo matemático

Conceitos Básicos

- Fases para implementação da PO: Implementação da Solução
  - envolve transformar a solução, obtida a partir do modelo, em um conjunto de instruções na linguagem operacional usada pelos administradores do sistema

Conceitos Básicos

- Exemplo: Qual deveria ser a largura e altura de um retângulo de área máxima construído com um fio de comprimento L?
  - Formalizando, temos que:
    - w=largura do retângulo
    - h=altura do retângulo
  - As restrições são:
    - w+h=L/2, ou seja, a largura+altura do retângulo é igual a metade do comprimento do fio
    - largura e altura não podem ser negativas

Conceitos Básicos

- Exemplo: Qual deveria ser a largura e altura de um retângulo de área máxima construído com um fio de comprimento L?
  - Expressando algebricamente essas restrições temos que:
    - $2(w+h)=L$
    - $w>=0$ e $h>=0$
  - Considerando agora a função objetivo, observamos que nosso objetivo é maximizar a área (z) do retângulo
- Então, nosso modelo pode ser definido como:
  - Maximizar $z=wh$
  - Sujeito a
    - $2(w+h)=L$
    - $w,h>=0$

Conceitos Básicos

- Exemplo: Uma agroindústria, deve produzir um tipo de ração para determinado animal.
  - A ração é produzida pela mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e resto de peixe
  - Cada ingrediente possui diferentes quantidades de dois nutrientes: proteína e cálcio
  - O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração: 30% de proteína e 50% de cálcio (**pelo menos**)
  - **O objetivo é** determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o **mínimo custo**

Conceitos Básicos

Nutrientes	Ingredientes			
	Osso	Soja	Peixe	Ração
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos (R$/kg)	0,56	0,81	0,46	

Conceitos Básicos

- Exemplo: Uma agroindústria, deve produzir um tipo de ração para determinado animal.
  - Defina a variável de decisão **xj** como a quantidade (em kg) do ingrediente j que deve ser usada em uma unidade (1kg) de ração, j=1 (osso), 2 (soja), 3 (peixe). Assim, o custo da mistura será dado por:

$$f(x1, x2, x3)=0{,}56x1+0{,}81x2+0{,}46x3$$

  - e as restrição são dadas por:

$$0{,}2x1+0{,}5x2+0{,}4x3>=0{,}3$$

$$0{,}6x1+0{,}4x2+0{,}4x3>=0{,}5$$

$$x1+x2+x3=1$$

$$x1>=0,\ x2>=0,\ x3>=0$$

Conceitos Básicos

- Exemplo: Uma agroindústria, deve produzir um tipo de ração para determinado animal.
  - O modelo matemático resultante é, então, definido como:

Minimizar f(x1, x2, x3)=0,56x1+0,81x2+0,46x3

Sujeito a

0,2x1+0,5x2+0,4x3>=0,3

0,6x1+0,4x2+0,4x3>=0,5

x1+x2+x3=1

x1>=0, x2>=0, x3>=0