

INTERPOLAÇÃO

Profa. *Luciana Montera*
montera@facom.ufms.br

Faculdade de Computação – Facom/UFMS

Métodos Numéricos

Interpolação

- Definição
- Aplicações
- Interpolação Linear
 - Equação da reta
 - Estudo do erro
- Interpolação Polinomial
 - Fórmula de Lagrange
 - Polinômio Interpolador de Lagrange
 - Estudo do erro

Métodos Numéricos

Definição

É o processo de estimar valores de uma função f para valores de x diferentes de x_i , para $i = 0, \dots, n$, sabendo-se apenas os valores de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Métodos Numéricos - Interpolação

Definição

É o processo de estimar valores de uma função f para valores de x diferentes de x_i , para $i = 0, \dots, n$, sabendo-se apenas os valores de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Qual o valor de $f(x_i)$ para $x_1 < x_i < x_2$?

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação

Qual o valor de $f(x_i)$ para $x_1 < x_i < x_2$?

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

Como determinar o valor de $f(x_i)$?



Obter uma função que relaciona as variáveis x e y



POLINÔMIO

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação

Métodos de Interpolação Polinomial são utilizados para **aproximar** uma função $f(x)$ quando:

- $f(x)$ é desconhecida. Tem-se apenas valores de f em um conjunto de pontos
- $f(x)$ é conhecida mas de difícil manipulação

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

Interpolação Polinomial

Linear: Polinômio de grau 1

Quadrática: Polinômio de grau 2

Lagrange: Polinômio de grau n

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Problema: Seja $f(x)$ dada pela tabela

Nota:
 $f(x_i) = f_i$

x_0	x_1	x_2	...	x_n
f_0	f_1	f_2		f_n

Determinar uma aproximação para $f(\mu)$, onde $x_i < \mu < x_{i+1}$ para $0 \leq i < n$

f não é conhecida → **aproximar** f pelo polinômio P_1

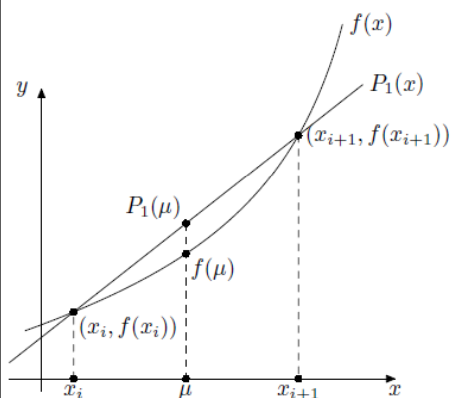
$P_1(\mu)$ será calculado, e não $f(\mu)$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

$P_1(x)$ é o polinômio de grau 1 que passa pelos pontos

$$A = (x_i, f_i) \text{ e } B = (x_{i+1}, f_{i+1})$$

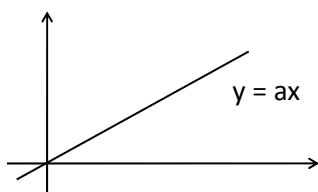


$$f(\mu) \approx P_1(\mu) = f_i + (\mu - x_i) \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Métodos Numéricos - Interpolação

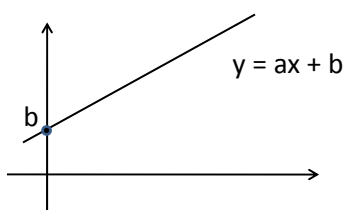
Interpolação Linear

Equações da Reta



a = coeficiente angular

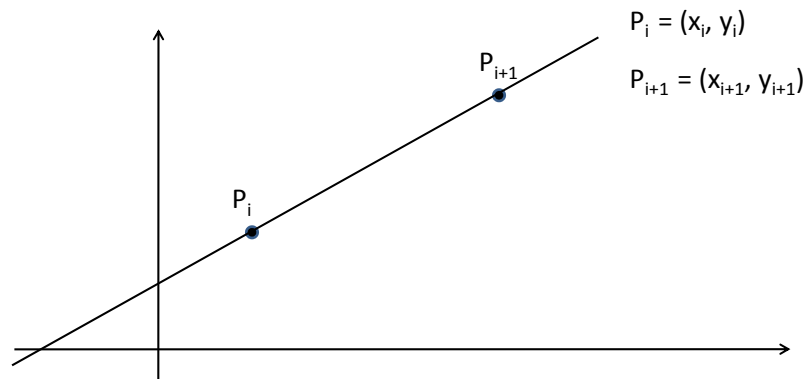
b = coeficiente linear



Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

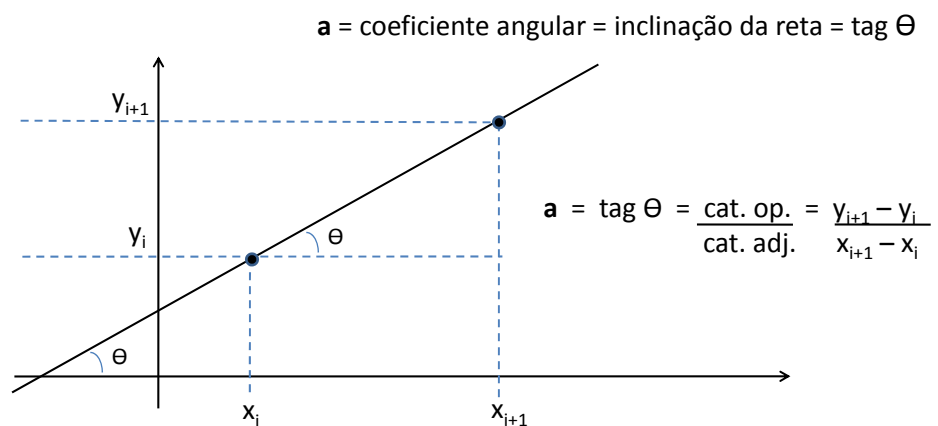
Equações da Reta



Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

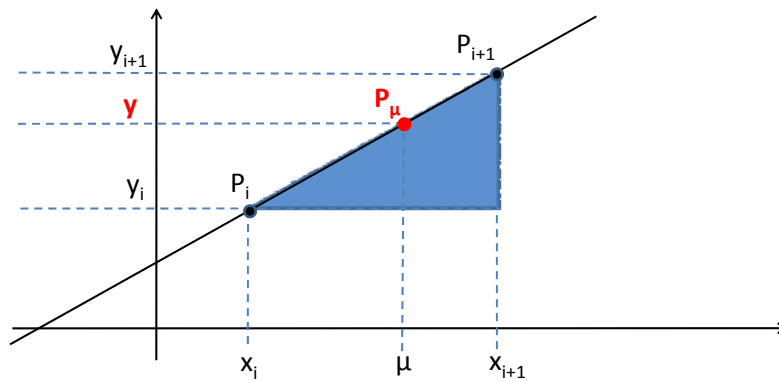
Equações da Reta



Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Equações da Reta

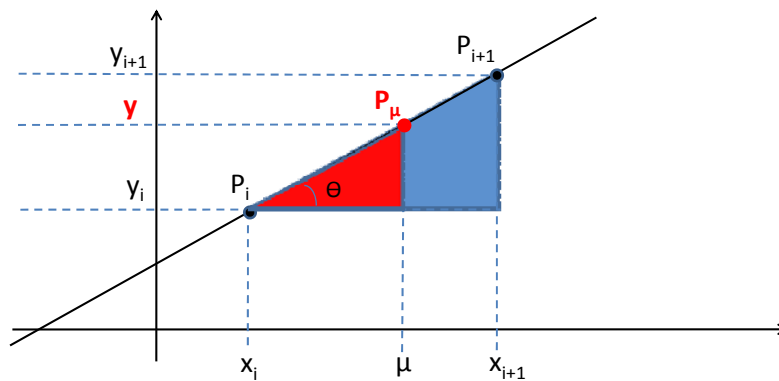


Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Equações da Reta

Semelhança entre triângulos

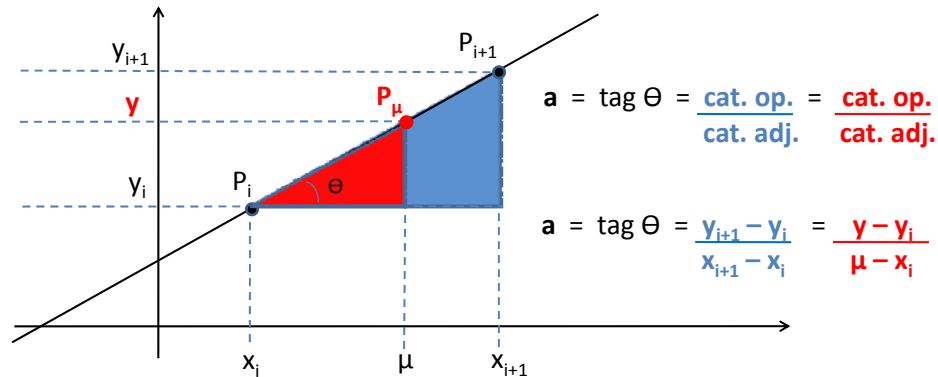


Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Equações da Reta

Semelhança entre triângulos



Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Equações da Reta

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{\mu - x_i}$$

$$(y - y_i)(x_{i+1} - x_i) = (\mu - x_i)(y_{i+1} - y_i)$$

$$(y - y_i) = (\mu - x_i) \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

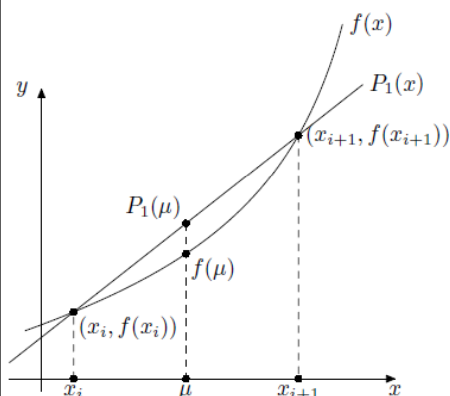
$$y = y_i + (\mu - x_i) \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

$P_1(x)$ é o polinômio de grau 1 que passa pelos pontos

$$A = (x_i, f_i) \text{ e } B = (x_{i+1}, f_{i+1})$$



$$f(\mu) \approx P_1(\mu) = f_i + (\mu - x_i) \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Exemplo: O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é apresentado na tabela:

x (horas)	0	1	2	3	4
y (volume de bactérias)	32	47	65	92	132

Calcule o volume de bactérias no instante $t = 3$ horas e 42 minutos, ou seja, calcule o valor de $P_1(3,7)$.

$$f(\mu) \approx P_1(\mu) = f_i + (\mu - x_i) \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Exemplo: O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é apresentado na tabela:

x (horas)	0	1	2	3	4
y (volume de bactérias)	32	47	65	92	132

Calcule o volume de bactérias no instante $t = 3$ horas e 42 minutos, ou seja, calcule o valor de $P_1(3,7)$.

$$f(3,7) \approx P_1(3,7) = 92 + (3,7 - 3) \frac{(132 - 92)}{(4 - 3)}$$

$$f(3,7) \approx P_1(3,7) = 120$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Exercício: O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas é apresentado na tabela:

x (horas)	0	1	2	3	4
y (volume de bactérias)	32	47	65	92	132

Calcule o volume de bactérias no instante $t = 1$ h e 25min.

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Exemplo: Dada a tabela

x (rad)	0,1	0,2	0,3	0,4
sen(x)	0,1	0,199	0,296	0,389

Calcule o valor aproximado de $\text{sen}(0,15)$

$$f(0,15) \approx P_1(0,15) = 0,1 + (0,15 - 0,1) \frac{(0,199 - 0,1)}{(0,2 - 0,1)}$$

$$f(0,15) \approx P_1(0,15) = 0,1495$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Exercício: Dada a tabela

x (rad)	0,1	0,2	0,3	0,4
sen(x)	0,1	0,199	0,296	0,389

Calcule o valor aproximado de $\text{sen}(0,32)$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Erro

Seja o intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e um ponto $x \in (x_i, x_{i+1})$.

Como $P_1(x)$ é apenas uma aproximação para $f(x)$, o erro cometido nesta aproximação é:

$$E(x) = f(x) - P_1(x)$$

$$E(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \frac{f''(\xi)}{2} \quad \text{para algum } \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Conta para o Erro

Suponha que $\forall x \in (x_i, x_{i+1}), |f''(x)| \leq M_2$, para alguma constante M_2 .

A seguinte estimativa para o erro pode ser considerada:

$$|E(x)| \leq \frac{M_2}{8} (x_{i+1} - x_i)^2$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Linear

Exemplo: Dada a tabela

x (rad)	0,1	0,2	0,3	0,4
sen(x)	0,1	0,199	0,296	0,389

Valor aproximado de $\text{sen}(0,15) \rightarrow f(0,15) \approx P_1(0,15) = 0,1495$

Calcule o erro da aproximação acima

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\text{sen}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |-\text{sen}(x)| \leq |-\text{sen}(0,2)| \\ &\leq \text{sen}(0,2) = 0,199 < 0,2 \quad \forall x \in [0,1, 0,2] \end{aligned}$$

$$|E(x)| \leq \frac{M_2}{8} (x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{0,2}{8} (0,2 - 0,1)^2 = 0,00025$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

Nota:
 $f(x_i) = f_i = y_i$

Problema: Dados $n + 1$ pares de valores (x_i, f_i) ,
 $i = 0, \dots, n$ com $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, determinar um polinômio
de grau n que passa por estes $n + 1$ pontos.

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n

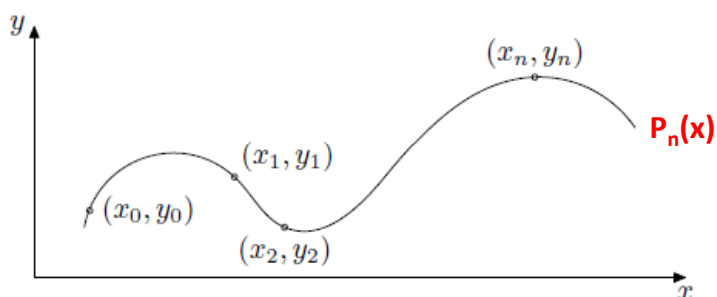
f não é conhecida $\rightarrow$ **aproximar** f pelo polinômio P_n

$P_n(\mu)$ será calculado, e não $f(\mu)$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

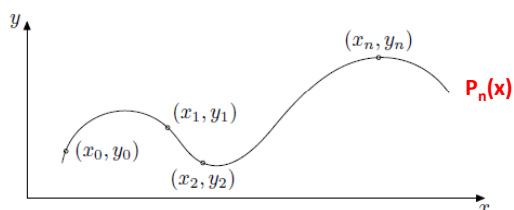
x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n



Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n



Proposição: Sejam $n + 1$ pontos dados por (x_i, f_i) , $i = 0, \dots, n$ onde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Então existe **um único** polinômio de grau n que passa por estes pontos.

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

Demonstração: Considere $P_n(x)$ um polinômio de grau n :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{sendo } a_i = \text{cte}$$

P_n passa pelos pontos (x_i, f_i) .

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n$$

É preciso determinar as constantes a_i para depois determinar $P_n(x)$.

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

Demonstração:

$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n$ é equivalente ao sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tem solução única?} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_nx_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_nx_1^n = f_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \dots + a_nx_n^n = f_n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

O Sistema tem solução única desde que o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas seja não nulo

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

Demonstração:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- A é a matriz de coeficientes das incógnitas.
- É uma matriz de **Vandermonde**, cujo $\det(A)$ é dado por:

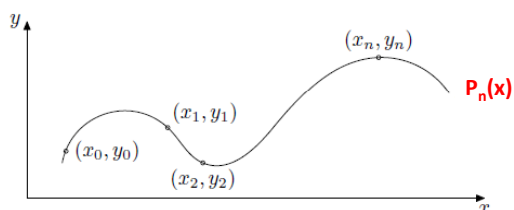
$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

- Como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, temos que $\det(A) \neq 0$, como queríamos demonstrar.

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n



$P_n(x)$ existe e é único

Problema: dados os pontos (x_i, f_i) para $i = 0, \dots, n$, onde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, determinar o valor de $f(\mu)$, para $\mu \neq x_j$, $j = 0, \dots, n$.

Solução: Aproximar $f(\mu)$ por $P_n(\mu)$, onde P_n é o polonômio de grau n que passa pelos pontos (x_i, f_i) para $i = 0, \dots, n$.

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

Exemplo: determine o valor de $\log(2,45)$ aproximado por um polinômio interpolador de grau 3.

x	2,3	2,4	2,5	2,6
log(x)	0,361728	0,380211	0,397940	0,414973

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = f_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = f_2 \\ a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = f_3 \end{array} \right.$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

Exemplo: determine o valor de $\log(2,45)$ aproximado por um polinômio interpolador de grau 3.

x	2,3	2,4	2,5	2,6
log(x)	0,361728	0,380211	0,397940	0,414973

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + 2,3a_1 + 5,9a_2 + 12,167a_3 = f_0 \\ a_0 + 2,4a_1 + 5,76a_2 + 13,824a_3 = f_1 \\ a_0 + 2,5a_1 + 6,25a_2 + 15,625a_3 = f_2 \\ a_0 + 2,6a_1 + 6,76a_2 + 17,576a_3 = f_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} a_0 = -0,404885 \\ a_1 = 0,528963 \\ a_2 = 0,107300 \\ a_3 = 0,009667 \end{array}$$

$$P_3(x) = -0,404885 + 0,528963x - 0,107300x^2 + 0,009667x^3$$

$$\log(2,45) \approx P_3(2,45) = 0,389170$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Polinômio Interpolador de Lagrange

Teorema (Lagrange): Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$ e conhecida nos pontos (x_i, f_i) $i = 0, \dots, n$. Existe um e um só polinômio P_n de grau menor ou igual a n interpolador de f nos pontos dados.

Demonstração: Seja o polinômio P_n definido por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

onde:

$$\text{Polin. de grau } n \leftarrow L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad k = 1, \dots, n$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Fórmula de Lagrange

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad k = 1, \dots, n$$

$$L_k(x_i) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} \quad k = 1, \dots, n$$

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Polinômio Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f_i$$

- $P_n(x)$ é um polinômio de grau n , pois é a soma de $L_i(x)f_i$ que é um polinômio de grau n para $i = 0, \dots, n$
- $P_n(x) = f(x)$ para todo x_k , $k = 0, \dots, n$

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^n L_i(x_k)f_i = f_i \text{ para todo } k = 0, \dots, n$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Polinômio Interpolador de Lagrange

Exemplo: Determine o polinômio de grau 3, $P_3(x)$, que passa pelos pontos da tabela abaixo. Em seguida, calcule $P_3(2)$.

x_i	0	1	3	4
f_i	2	4	5	0

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= \sum_{i=0}^3 L_i(x)f_i = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3 \\
 &= L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3 \\
 &= L_0(x)2 + L_1(x)4 + L_2(x)5 + L_3(x)0
 \end{aligned}$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Polinômio Interpolador de Lagrange

x_i	0	1	3	4
f_i	2	4	5	0

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1)(-3)(-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x(x-3)(x-4)}{(1)(-2)(-3)} = \frac{x(x-3)(x-4)}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{(3)(2)(-1)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{-6}$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Polinômio Interpolador de Lagrange

Exemplo: Determine o polinômio de grau 3, $P_3(x)$, que passa pelos pontos da tabela abaixo. Em seguida, calcule $P_3(2)$.

x_i	0	1	3	4
f_i	2	4	5	0

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x)f_i = L_0(x)2 + L_1(x)4 + L_2(x)5 + L_3(x)0$$

$$P_3(x) = 2 \left(\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12} \right) + 4 \left(\frac{x(x-3)(x-4)}{6} \right) + 5 \left(\frac{x(x-1)(x-4)}{-6} \right)$$

$$P_3(2) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = \frac{19}{3}$$

Métodos Numéricos - Interpolação