

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Profa. *Luciana Montera*
montera@facom.ufms.br

Faculdade de Computação – Facom/UFMS

Integração Numérica

- Integral definida
- Aplicações
- Métodos Integração Numérica
 - Fórmula de Newton-Cotes
 - Método dos Trapézios
 - Método de Simpson

Integral Definida

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ da qual se conhece a primitiva F . O valor da *integral definida* de f pode ser calculada usando a fórmula de Newton-Leibniz:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Integração Numérica

- Os métodos de integração numérica aproximam valores de integrais definidas.
- A integração numérica é útil quando:
 - Não se conhece a função f . Tem-se apenas uma tabela de valores para f .
 - f é conhecida mas é muito complexa, o que dificulta a determinação de sua primitiva

Integração Numérica

- Os métodos de integração numérica aproximam valores de integrais definidas.

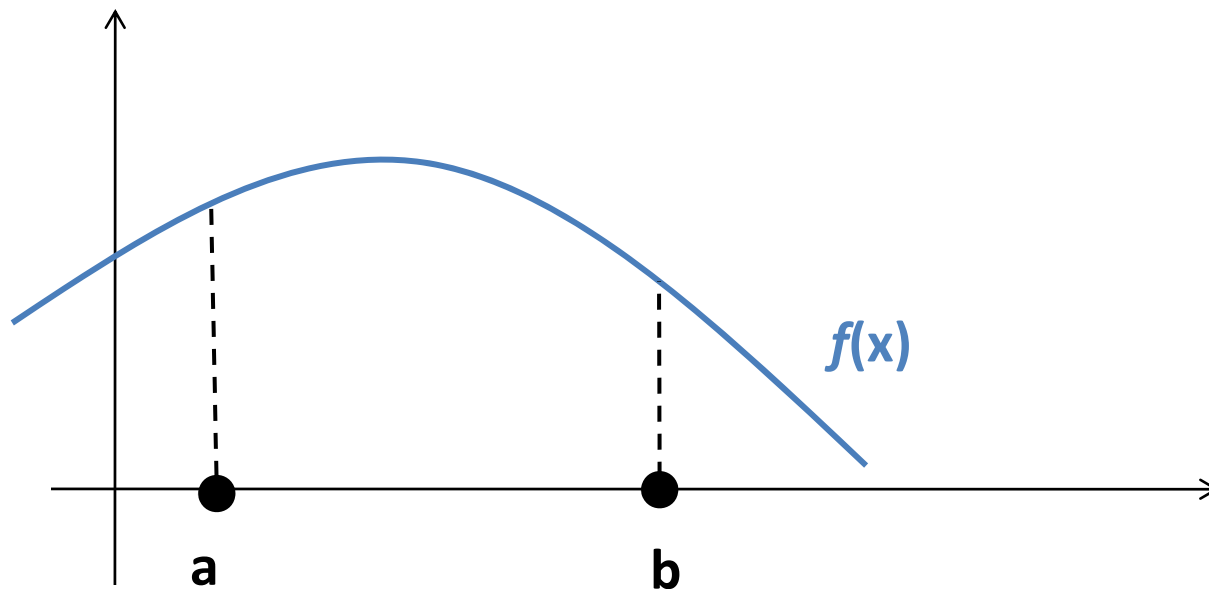
f é aproximada por uma função p, mais simples, cuja primitiva é mais fácil de se obter.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

Integração Numérica

f é aproximada por uma função p , mais simples, cuja primitiva é mais fácil de se obter.

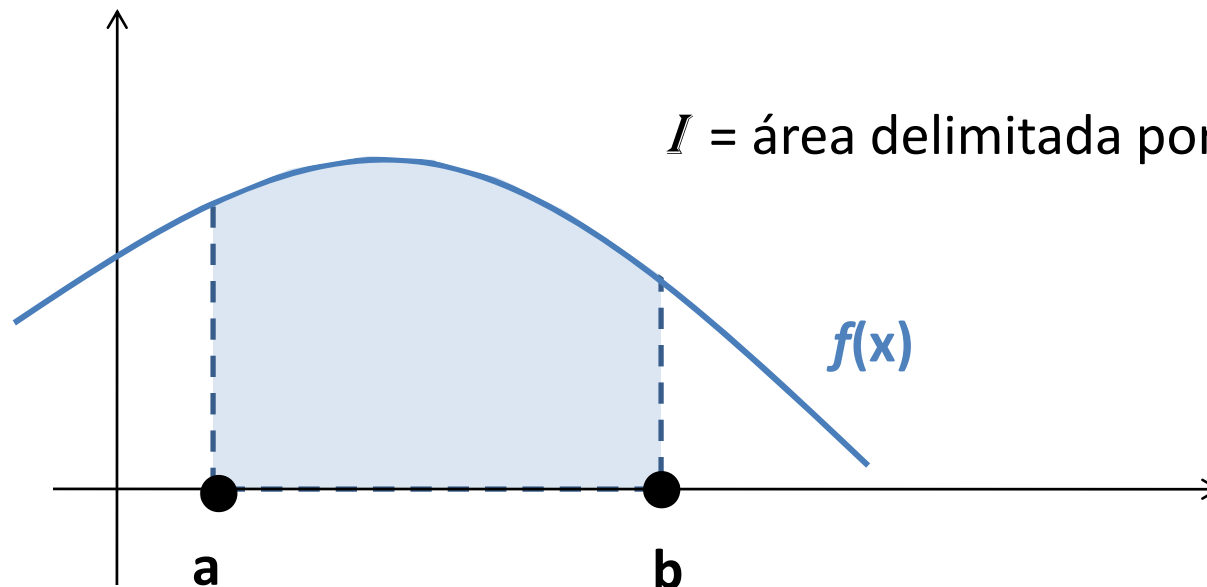
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$



Integração Numérica

f é aproximada por uma função p , mais simples, cuja primitiva é mais fácil de se obter.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

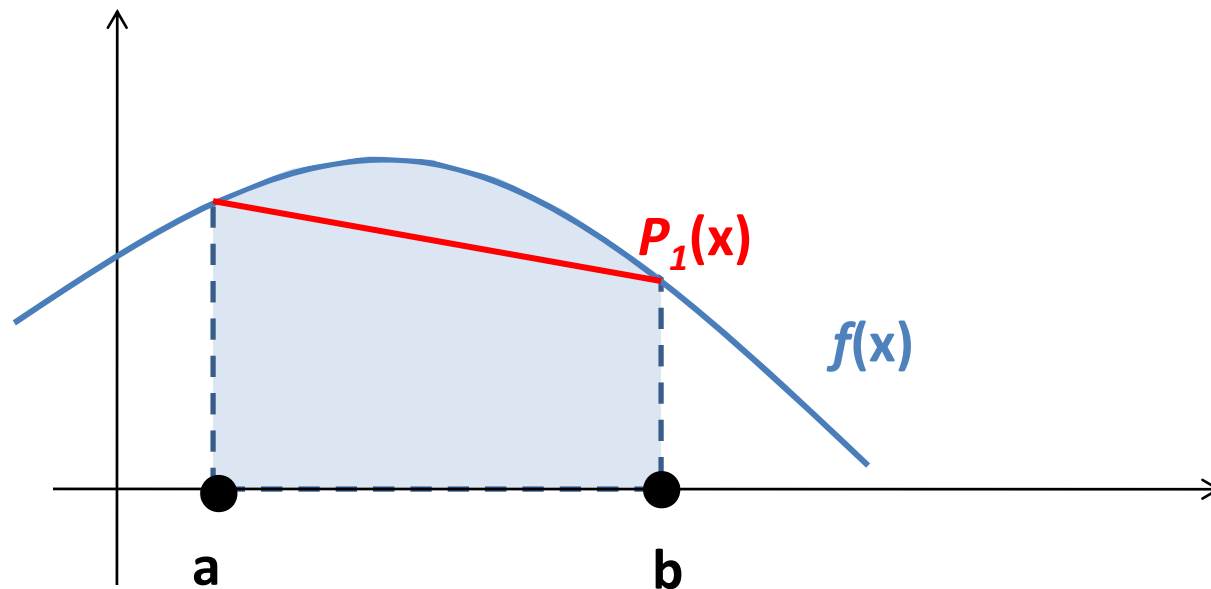


$I = \text{área delimitada por } f(x) \text{ no intervalo } [a, b]$

Integração Numérica

f é aproximada por uma função p , mais simples, cuja primitiva é mais fácil de se obter.

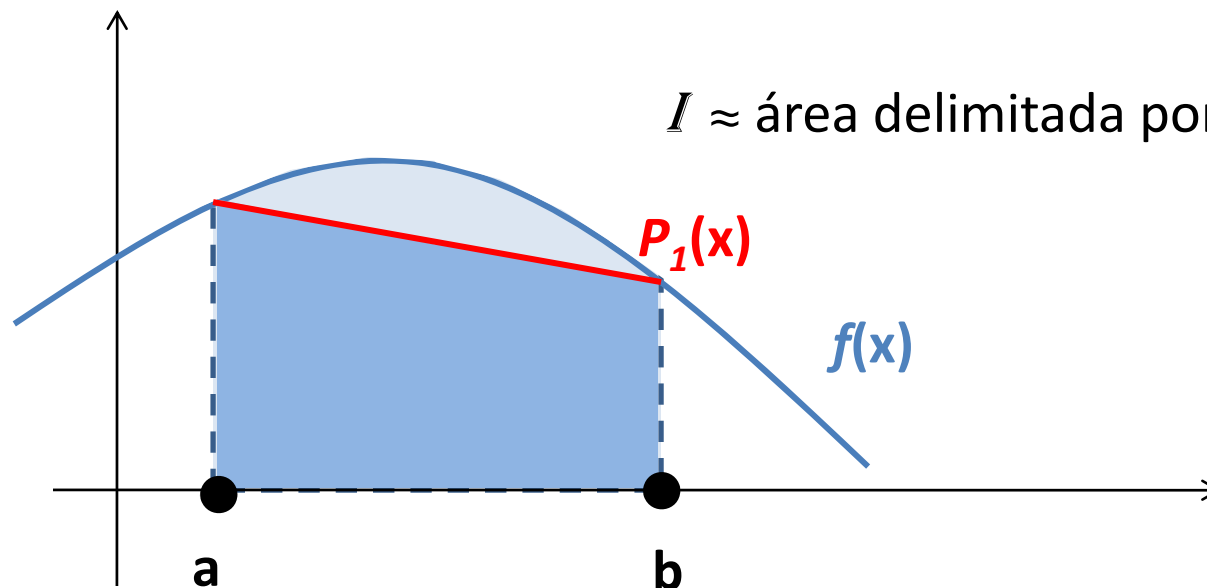
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$



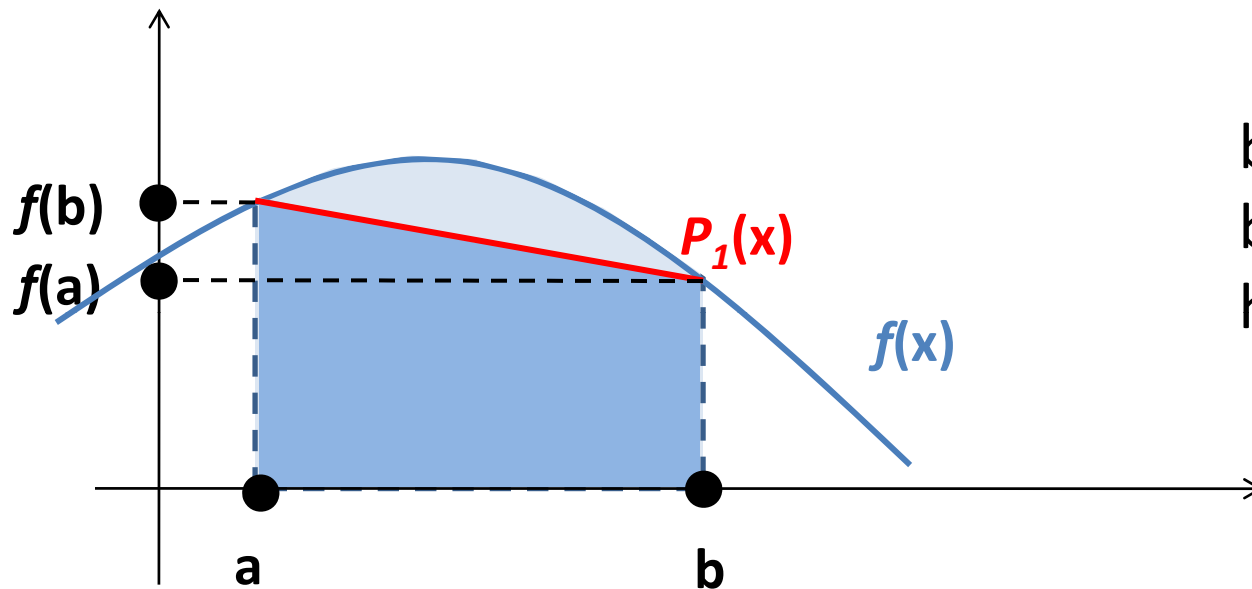
Integração Numérica

f é aproximada por uma função p , mais simples, cuja primitiva é mais fácil de se obter.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$



Integração Numérica

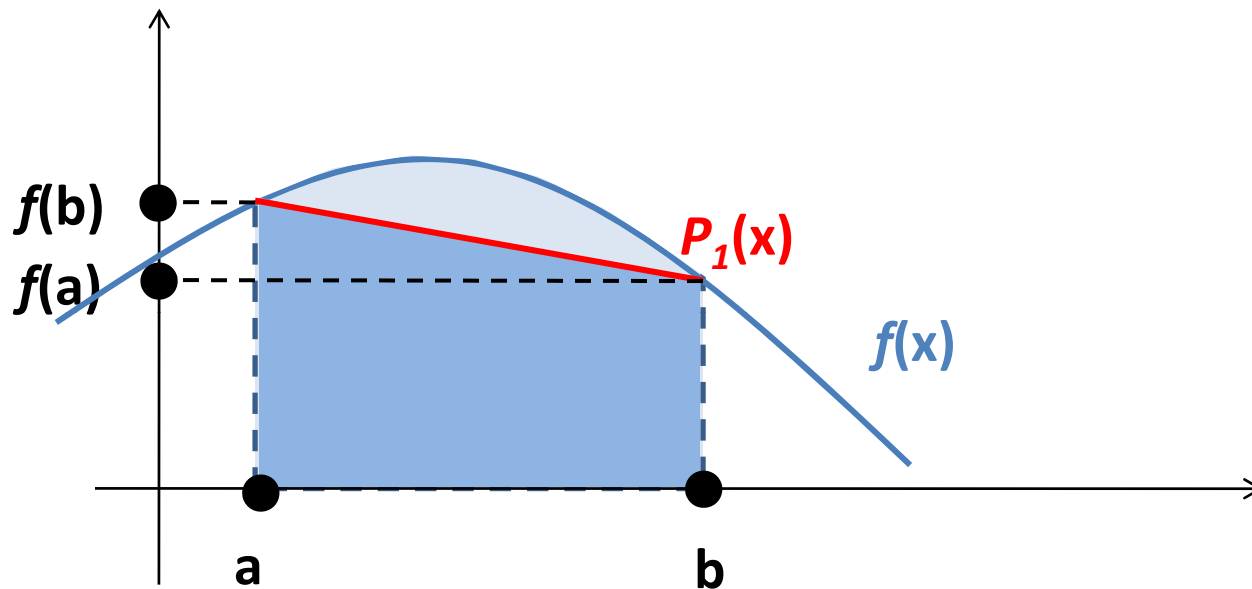


base_menor = $f(a)$
base_maior = $f(b)$
 $h = b - a$

Área do Trapézio

$$h \left(\frac{(base_menor + base_maior)}{2} \right) = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right)$$

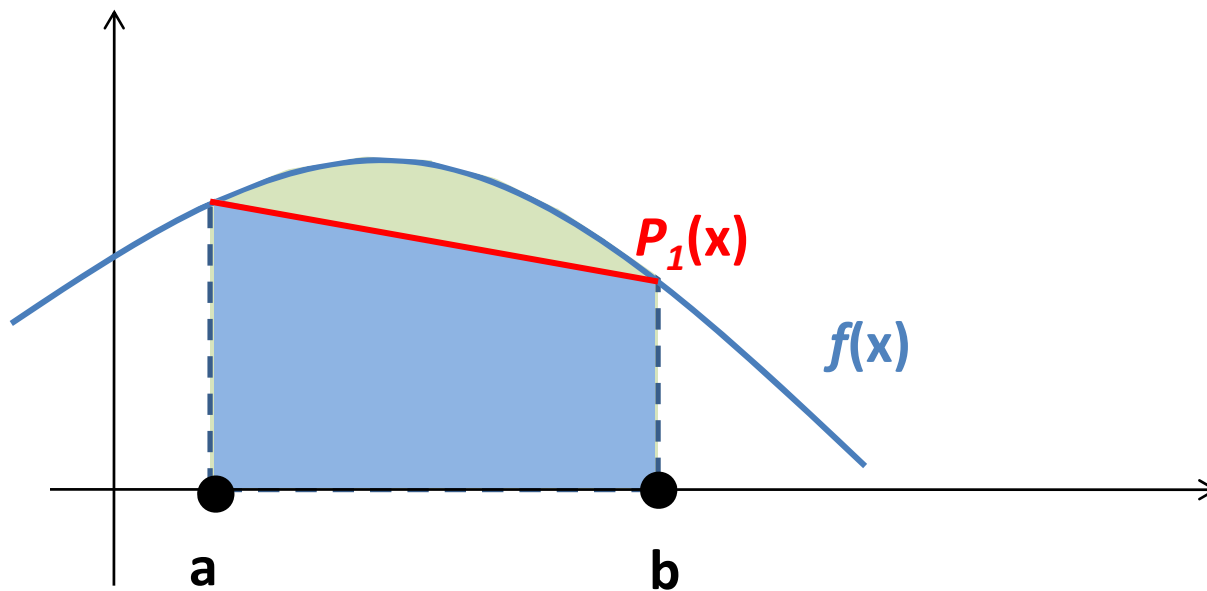
Integração Numérica



$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_1(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]$$

Integração Numérica

ERRO



Métodos de Integração Numérica

Método dos Trapézios

Método de Simpson

Método dos Trapézios

Seja $\int_a^b f(x) dx$. Considere a subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n

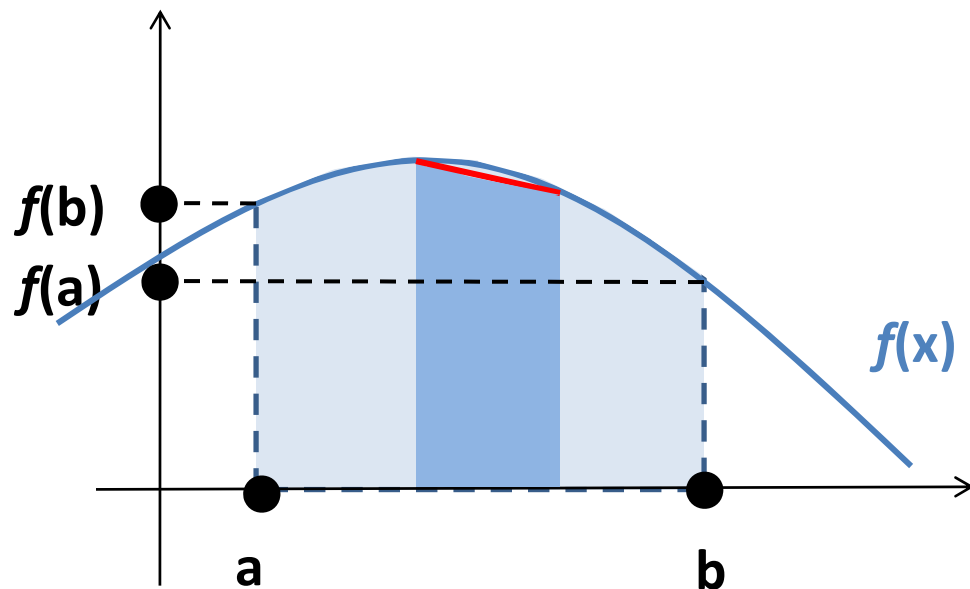
Subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de comprimento $h > 0$. Assim temos:

Método dos Trapézios

Seja $\int_a^b f(x) dx$. Considere a subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n

Subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de comprimento $h > 0$. Assim temos:

- $h = (b - a)/n$
- $x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n$



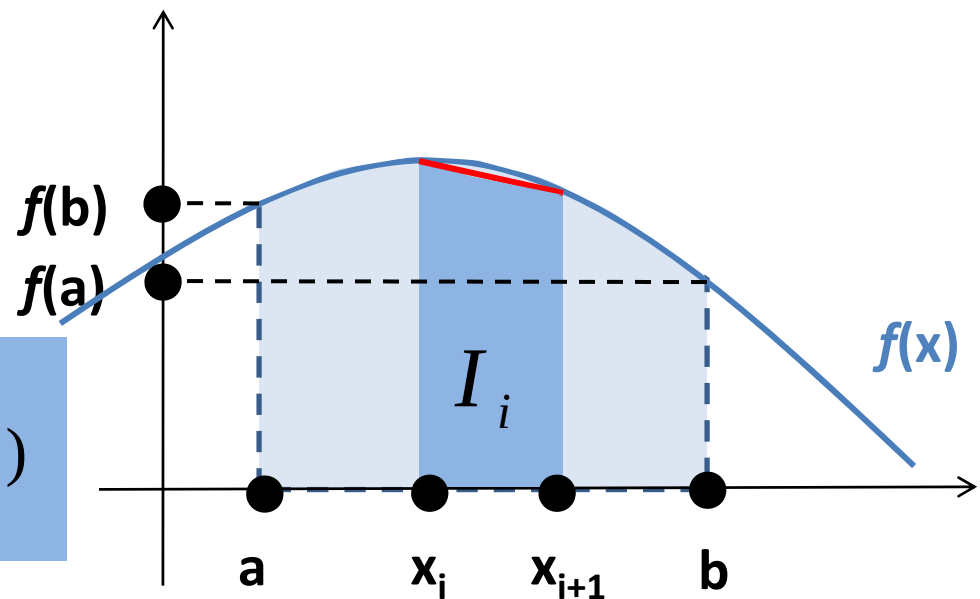
Método dos Trapézios

Seja $\int_a^b f(x) dx$. Considere a subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n

Subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de comprimento $h > 0$. Assim temos:

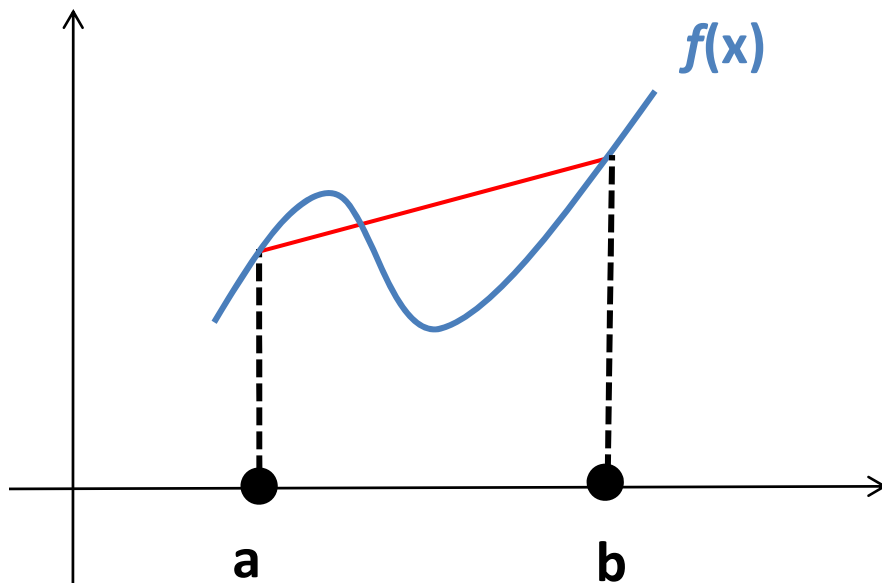
- $h = (b - a)/n$
- $x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n$

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$



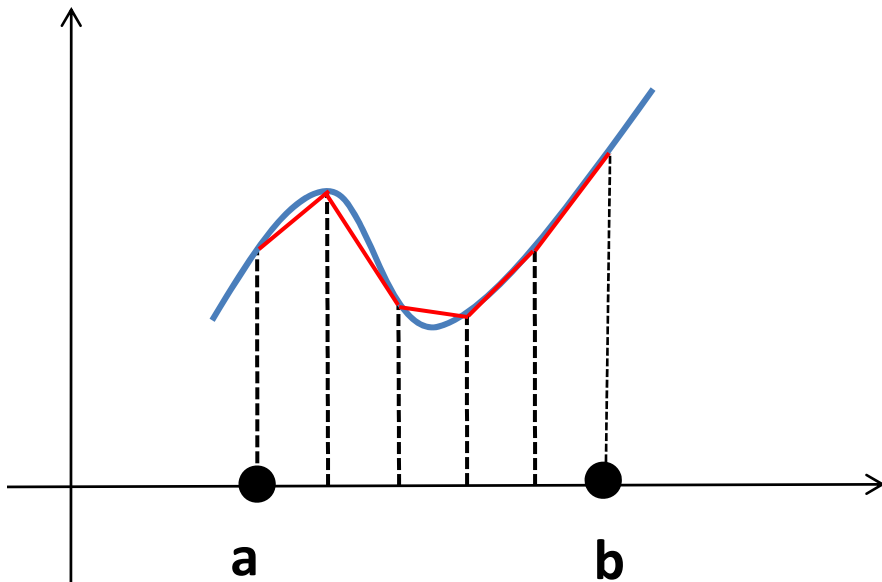
Método dos Trapézios

Aproximação da área delimitada por $f(x)$
pela área de 1 trapézio



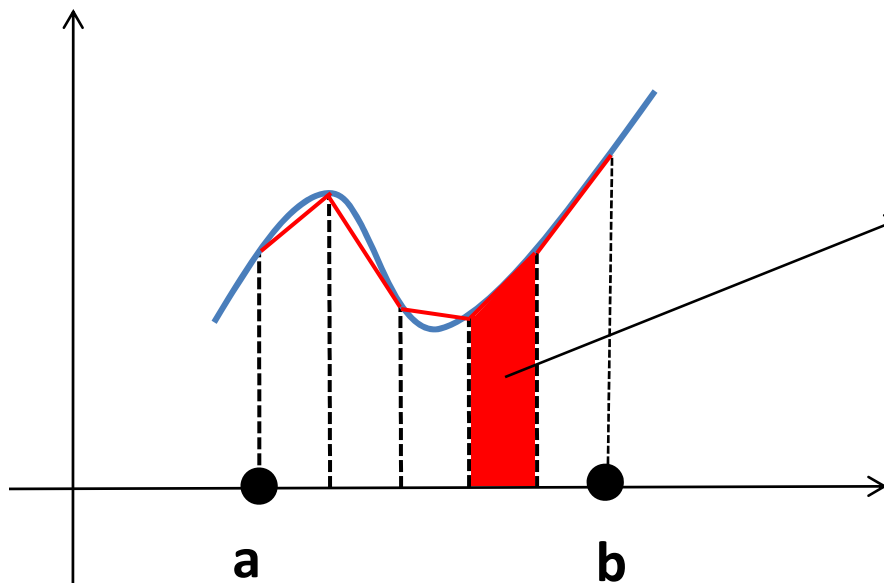
Método dos Trapézios

Aproximação da área delimitada por $f(x)$
pela somatória da área de $n = 5$ trapézios



Método dos Trapézios

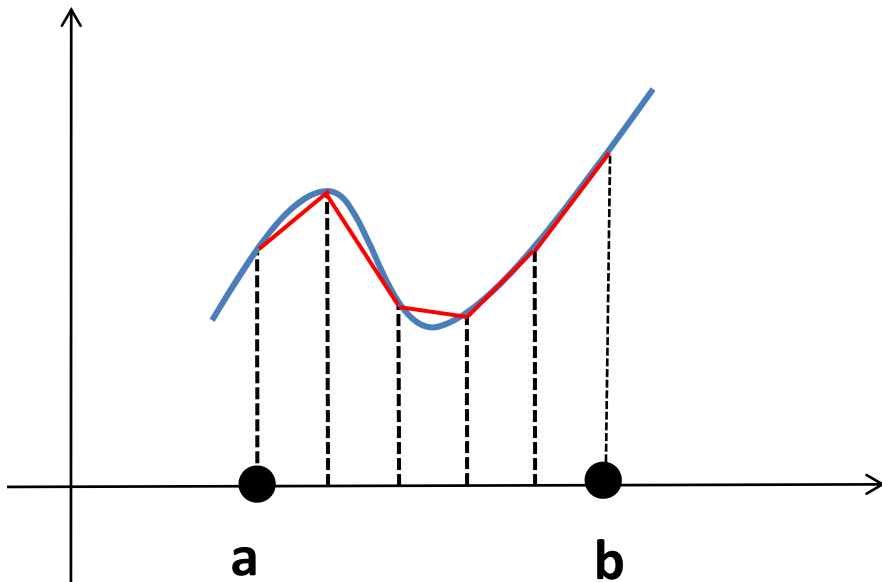
Aproximação da área delimitada por $f(x)$
pela somatória da área de $n = 5$ trapézios



$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

Método dos Trapézios

Aproximação da área delimitada por $f(x)$
pela somatória da área de $n = 5$ trapézios



$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

$$I = \sum_{i=0}^n I_i$$

Método dos Trapézios

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i$$

Método dos Trapézios

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{n-1} I_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) \end{aligned}$$

Método dos Trapézios

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

$$= \frac{h}{2} [(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + (f_2 + f_3) + \dots + (f_{n-1} + f_n)]$$

Método dos Trapézios

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{n-1} I_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) \\ &= \frac{h}{2} [(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + (f_2 + f_3) + \dots + (f_{n-1} + f_n)] \\ &= \frac{h}{2} \left[(f_0 + f_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right] = h \left[\frac{(f_0 + f_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right] \end{aligned}$$

Método dos Trapézios

Seja $\int_a^b f(x) dx$. Considere a subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n

Subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de comprimento $h > 0$. Assim temos:

- $h = (b - a)/n$
- $x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n$

$$I = \left(\frac{b - a}{n} \right) \left[\frac{(f_0 + f_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$$

Método dos Trapézios

Exemplo:

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, o intervalo $[3,0, 3,6]$ e a seguinte integral:

$$\int_{3,0}^{3,6} f(x) dx$$

Calcule:

- o valor aproximado da integral para $n = 1$
- o valor aproximado da integral para $n = 6$
- o valor exato da integral

Método dos Trapézios

Exemplo:

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, o intervalo $[3,0, 3,6]$ e $n = 1$. Calcule o valor

aproximado da Integral:

$$\int_{3,0}^{3,6} f(x) dx$$

Método dos Trapézios

Exemplo:

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, o intervalo $[3,0, 3,6]$ e $n = 1$. Calcule o valor

aproximado da Integral:

$$\int_{3,0}^{3,6} f(x) dx$$

Solução:

$$I = \left(\frac{b-a}{n} \right) \left[\frac{(f_0 + f_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$$

$$a = 3,0$$

$$b = 3,6$$

$$f_0 = 1/3,0 = 0,333$$

$$f_n = 1/3,6 = 0,278$$

$$n = 1$$

$$I = 0,1833$$

Método dos Trapézios

Exemplo:

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, o intervalo $[3,0, 3,6]$ e $n = 6$. Calcule o valor

aproximado da Integral:

$$\int_{3,0}^{3,6} f(x) dx$$

Método dos Trapézios

Solução:

$$a = 3,0$$

$$b = 3,6$$

$$n = 6$$

$$h = (3,6 - 3)/6 = 0,1$$

$$f_0 = 1/3,0 = 0,3333$$

$$f_2 = 1/3,2 = 0,3125$$

$$f_4 = 1/3,4 = 0,2941$$

$$f_6 = 1/3,6 = 0,2778$$

$$f_1 = 1/3,1 = 0,3225$$

$$f_3 = 1/3,3 = 0,3030$$

$$f_5 = 1/3,5 = 0,2857$$

Método dos Trapézios

Solução:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{b-a}{n} \right) \left[\frac{(f_0 + f_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right] \\ &= 0,1 \left[\left(\frac{0,3333 + 0,2778}{2} \right) + (0,3225 + 0,3125 + 0,3030 + 0,2941 + 0,2857) \right] \\ &= 0,1 [0,3056 + 1,5158] = 0,1 * 1,8234 \\ &= 0,1823 \end{aligned}$$

Método dos Trapézios

Exemplo:

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, e o intervalo $[3,0, 3,6]$. Calcule o valor *exato* da

Integral:

$$\int_{3,0}^{3,6} f(x) dx$$

Método dos Trapézios

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \ln(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{3,0}^{3,6} f(x) dx &= F(3,6) - F(3,0) \\ &= \ln(3,6) - \ln(3,0) \\ &= 1,28093 - 1,09861 \\ &= 0,18232 \end{aligned}$$

Método dos Trapézios

Exercício:

Seja $f(x) = e^x$, o intervalo $[0, 1]$ e a seguinte integral:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Calcule:

- o valor aproximado da integral para $n = 1$
- o valor aproximado da integral para $n = 4$
- o valor aproximado da integral para $n = 4$
- o valor exato da integral
- o erro cometido em cada aproximação

Método dos Trapézios

Solução:

Valor aproximado para $n = 1$

$$I = \left(\frac{b-a}{n} \right) \left[\frac{(f_0 + f_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$$

$a = 0$
 $b = 1$
 $f_0 = e^0 = 1$
 $f_n = e^1 = 2,71828$
 $n = 1$

$$I = \left(\frac{1-0}{1} \right) \left[\frac{(1 + 2,71828)}{2} \right] = 1,85914$$

Método dos Trapézios

Solução:

Valor aproximado para $n = 4$

$$I = \left(\frac{b - a}{n} \right) \left[\frac{(f_0 + f_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$$

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$f_0 = e^0 = 1$$

$$f_2 = e^2 =$$

$$f_4 = e^4 =$$

$$n = 4$$

$$f_1 = e^1 = 2,71828$$

$$f_3 = e^3 =$$