INTERPOLAÇÃO

Profa. *Luciana Montera*
montera@facom.ufms.br

Faculdade de Computação – Facom/UFMS

Interpolação

- Definição
- Aplicações
- Interpolação Linear
  - Equação da reta
  - Estudo do erro
- Interpolação Polinomial
  - Fórmula de Lagrange
  - Polinômio Interpolador de Lagrange
  - Estudo do erro

Definição

É o processo de estimar valores de uma função f para valores de x diferentes de x_i, para i = 0, ..., n, sabendo-se apenas os valores de $f(x)$ nos pontos x_0, x_1, ..., x_n.

Definição

É o processo de estimar valores de uma função f para valores de x diferentes de x_i, para i = 0, ..., n, sabendo-se apenas os valores de $f(x)$ nos pontos x_0, x_1, ..., x_n.

Qual o valor de $f(x_i)$ para $x_1 < x_i < x_2$?

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

Aplicações

- Obtenção de valores intermediários em tabelas (crescimento de bactérias, consumo de água, energia, etc)
- Integração numérica
- Cálculo de raízes de equação
- Solução de equações diferencias ordinárias (EDO´s)

Interpolação

Qual o valor de $f(x_i)$ para $x_1 < x_i < x_2$?

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

Como determinar o valor de $f(x_i)$?

↓

Obter uma função que relaciona as variáveis x e y

↓

POLINÔMIO

Interpolação

Métodos de Interpolação Polinomial são utilizados para ***aproximar*** uma função *f*(x) quando:

– *f*(x) é desconhecida. Tem-se apenas valores de *f* em um conjunto de pontos
– *f* (x) é conhecida mas de difícil manipulação

Interpolação Polinomial

Interpolação Polinominal

Linear: Polinômio de grau 1

Quadrática: Polinômio de grau 2

Lagrange: Polinômio de grau n

Interpolação Linear

Problema: Seja $f(x)$ dada pela tabela

Nota: $f(x_i) = f_i$

x_0	x_1	x_2	...	x_n
f_0	f_1	f_2		f_n

Determinar uma aproximação para $f(\mu)$, onde $x_i < \mu < x_{i+1}$ para $0 \leq i < n$

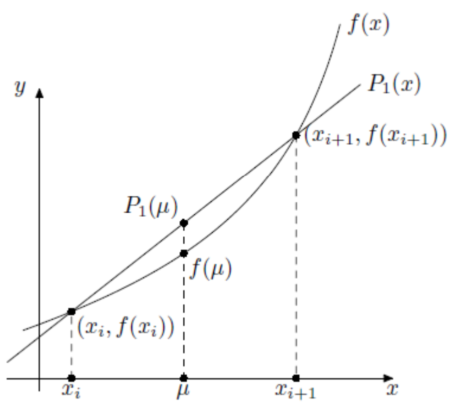
f não é conhecida → **aproximar** f pelo polinômio P_1

$P_1(\mu)$ será calculado, e não $f(\mu)$

Interpolação Linear

$P_1(x)$ é o polinômio de grau 1 que passa pelos pontos

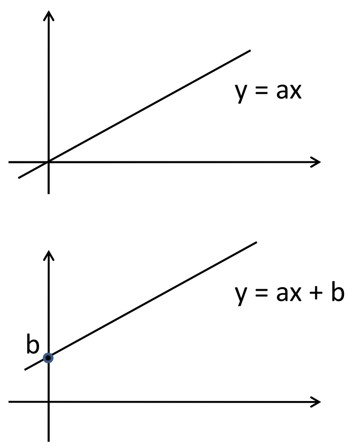
$A = (x_i, f_i)$ e $B = (x_{i+1}, f_{i+1})$



$$f(\mu) \approx P_1(\mu) = f_i + (\mu - x_i) \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Interpolação Linear

Equações da Reta

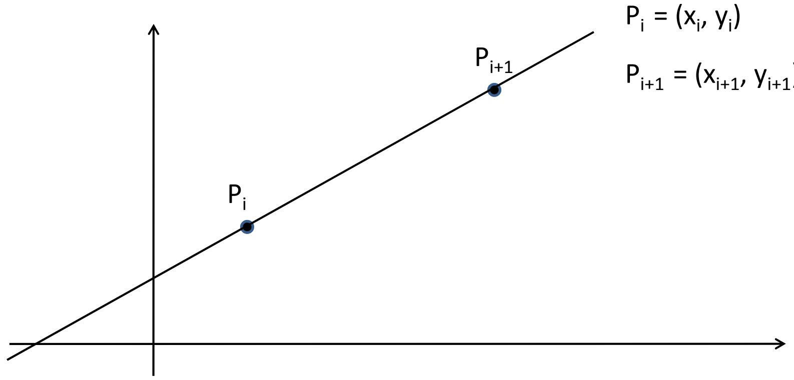


a = coeficiente angular

b = coeficiente linear

Interpolação Linear

Equações da Reta



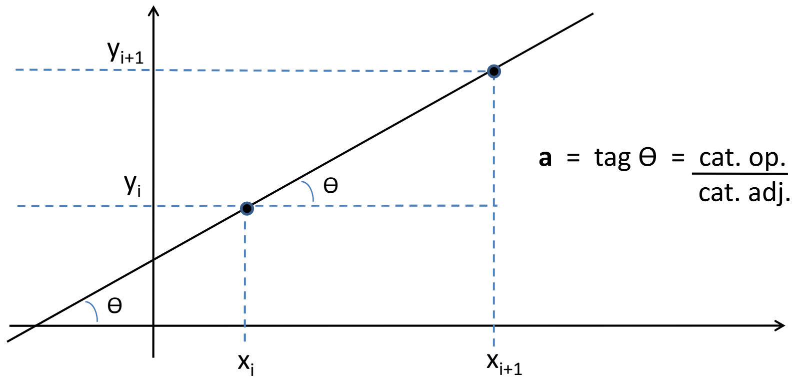
$P_i = (x_i, y_i)$

$P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$

Interpolação Linear

Equações da Reta

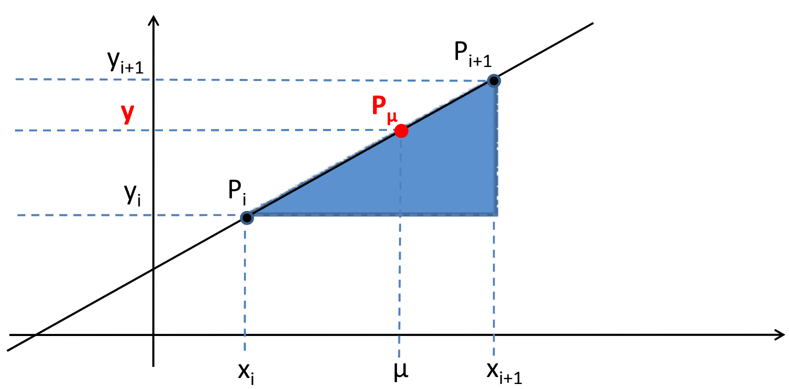
a = coeficiente angular = inclinação da reta = tag ϴ



$$\mathbf{a} = \text{tag}\,\theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. adj.}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Interpolação Linear

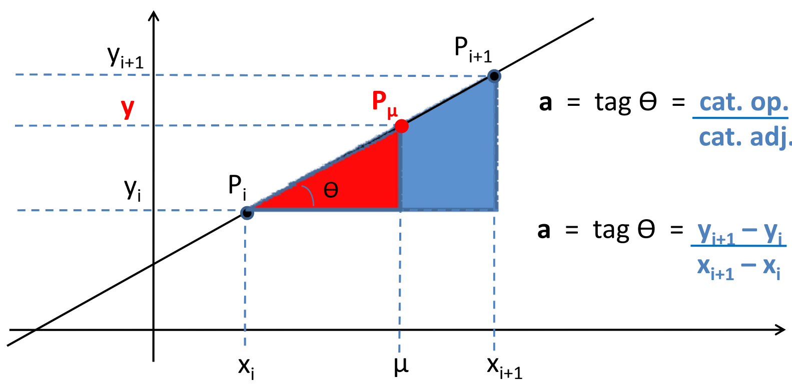
Equações da Reta



Interpolação Linear

Equações da Reta

Semelhança entre triângulos



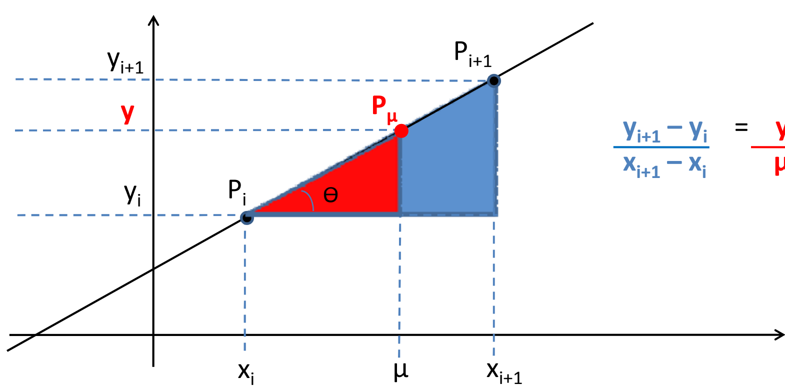
$$\mathbf{a} = \text{tag}\,\Theta = \frac{\textbf{cat. op.}}{\textbf{cat. adj.}} = \frac{\textbf{cat. op.}}{\textbf{cat. adj.}}$$

$$\mathbf{a} = \text{tag}\,\Theta = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{\mu - x_i}$$

Interpolação Linear

Equações da Reta

Semelhança entre triângulos



$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{\mu - x_i}$$

Interpolação Linear

Equações da Reta

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{\mu - x_i}$$

$$(y - y_i)\,(x_{i+1} - x_i) = (\mu - x_i)\,(y_{i+1} - y_i)$$

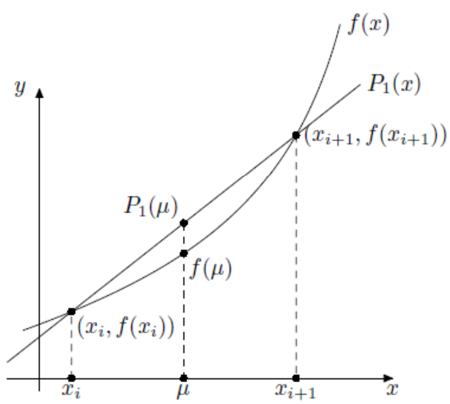
$$(y - y_i) = (\mu - x_i)\,\frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

$$y = y_i + (\mu - x_i)\,\frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Interpolação Linear

$P_1(x)$ é o polinômio de grau 1 que passa pelos pontos

$A = (x_i, f_i)$ e $B = (x_{i+1}, f_{i+1})$



$$f(\mu) \approx P_1(\mu) = f_i + (\mu - x_i)\,\frac{(f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Interpolação Linear

Exemplo: O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após *x* horas é apresentado na tabela:

x (horas)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y (volume de bactérias)	32	47	65	92	132

Calcule o volume de bactérias no instante t = 3 horas e 42 minutos, ou seja, calcule o valor de $P_1(3,7)$.

$$f(\mu) \approx P_1(\mu) = f_i + (\mu - x_i)\,\frac{(f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Interpolação Linear

Exemplo: O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após *x* horas é apresentado na tabela:

x (horas)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y (volume de bactérias)	32	47	65	92	132

Calcule o volume de bactérias no instante t = 3 horas e 42 minutos, ou seja, calcule o valor de $P_1(3,7)$.

$$f(3,7) \approx P_1(3,7) = 92 + (3,7 - 3)\,\frac{(132 - 92)}{(4 - 3)}$$

$$f(3,7) \approx P_1(3,7) = 120$$

Interpolação Linear

Exercício: O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após *x* horas é apresentado na tabela:

x (horas)	0	1	2	3	4
y (volume de bactérias)	32	47	65	92	132

Calcule o volume de bactérias no instante t = 1h e 25min.

Interpolação Linear

Exemplo: Dada a tabela

x (rad)	0,1	0,2	0,3	0,4
sen(x)	0,1	0,199	0,296	0,389

Calcule o valor aproximado de *sen*(0,15)

$$f(0{,}15) \approx P_1(0{,}15) = 0{,}1 + (0{,}15 - 0{,}1)\,\frac{(0{,}199 - 0{,}1)}{(0{,}2 - 0{,}1)}$$

$$f(0{,}15) \approx P_1(0{,}15) = 0{,}1495$$

Interpolação Linear

Exercício: Dada a tabela

x (rad)	0,1	0,2	0,3	0,4
sen(x)	0,1	0,199	0,296	0,389

Calcule o valor aproximado de *sen*(0,32)

Interpolação Linear

Erro

Seja o intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e um ponto $x \in (x_i, x_{i+1})$.

Como $P_1(x)$ é apenas uma aproximação para $f(x)$, o erro cometido nesta aproximação é:

$$\boxed{E(x) = f(x) - P_1(x)}$$

$$\boxed{E(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \frac{f''(\xi)}{2} \quad \text{para algum } \xi \in (x_i, x_{i+1})}$$

Interpolação Linear

Conta para o Erro

Suponha que $\forall x \in (x_i, x_{i+1})$, $|f''(x)| \leq M_2$, para alguma constante M_2.

A seguinte estimativa para o erro pode ser considerada:

$$|E(x)| \leq \frac{M_2}{8} (x_{i+1} - x_i)^2$$

Interpolação Linear

Exemplo: Dada a tabela

x (rad)	0,1	0,2	0,3	0,4
sen(x)	0,1	0,199	0,296	0,389

Valor aproximado de *sen*(0,15) → $f(0,15) \approx P_1(0,15) = 0,1495$

Calcule o erro da aproximação acima

$f(x) = sen(x)$
$f'(x) = cos(x)$
$f''(x) = -sen(x)$

$|f''(x)| = |-sen(x)| \leq |-sen(0,2)|$
$\leq sen(0,2) = 0,199 < 0,2 \; \forall x \in [0,1,\ 0,2]$

$$|E(x)| \leq \frac{M_2}{8} (x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{0,2}{8} (0,2 - 0,1)^2 = 0,00025$$

Interpolação Polinomial

Nota:
$f(x_i) = f_i = y_i$

Problema: Dados n + 1 pares de valores (x_i, f_i), i = 0, ..., n com $x_i \neq x_j$ para i ≠ j, determinar um polinômio de grau n que passa por estes n + 1 pontos.

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n

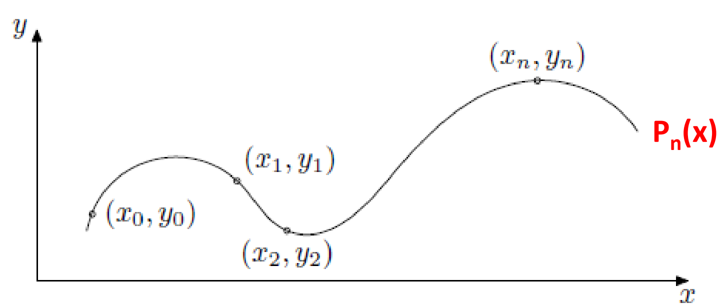
f não é conhecida → **aproximar** *f* pelo polinômio P_n

$P_n(\mu)$ será calculado, e não $f(\mu)$

Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

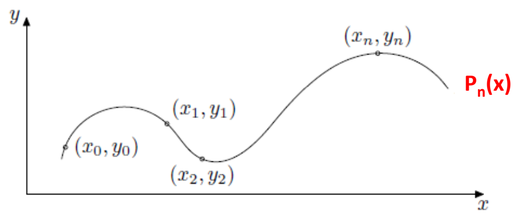
x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n



Métodos Numéricos - Interpolação

Interpolação Polinomial

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n



Proposição: *Sejam n + 1 pontos dados por (x_i, f_i), $i = 0, ..., n$ onde $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$. Então existe* **um único** *polinômio de grau n que passa por estes pontos.*

Interpolação Polinomial

Demonstração: Considere $P_n(x)$ um polinômio de grau n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n \quad = \boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{sendo } a_i = \text{cte}}$$

P_n passa pelos pontos (x_i, f_i).

$$\boxed{P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, ..., n}$$

É preciso determinar as constantes a_i para depois determinar $P_n(x)$.

Interpolação Polinomial

Demonstração:

$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n$ é equivalente ao sistema:

Tem solução única?

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_nx_0^n = f_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_nx_1^n = f_1 \\
\vdots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \dots + a_nx_n^n = f_n
\end{cases}
$$

O Sistema tem solução única desde que o determinante da matriz dos coeficientes das icógnitas seja não nulo

Interpolação Polinomial

Demonstração:

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\
\vdots & & & & & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n
\end{pmatrix}
$$

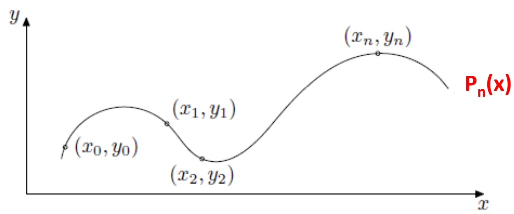
- A é a matriz de coeficientes das icógnitas.
- É uma matriz de **Vandermonde**, cujo det(A) é dado por:

$$
\boxed{\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)}
$$

- Como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, temos que $\det(A) \neq 0$, como queríamos demonstrar.

Interpolação Polinomial

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n



$P_n(x)$ existe e é único

Problema: dados os pontos (x_i, f_i) para i = 0,..., n, onde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, determinar o valor de $f(\mu)$, para $\mu \neq x_j$, j = 0,..., n.

Solução: Aproximar $f(\mu)$ por $P_n(\mu)$, onde P_n é o polonômio de grau n que passa pelos pontos (x_i, f_i) para i = 0,..., n.

Interpolação Polinomial

Exemplo: determine o valor de log(2,45) aproximado por um polinômio interpolador de grau 3.

x	2,3	2,4	2,5	2,6
log(x)	0,361728	0,380211	0,397940	0,414973

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = f_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = f_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 = f_3 \end{cases}$$

Interpolação Polinomial

Exemplo: determine o valor de log(2,45) aproximado por um polinômio interpolador de grau 3.

x	2,3	2,4	2,5	2,6
log(x)	0,361728	0,380211	0,397940	0,414973

$$\begin{cases} a_0 + 2{,}3a_1 + 5{,}9a_2 + 12{,}167\,a_3 = f_0 \\ a_0 + 2{,}4a_1 + 5{,}76a_2 + 13{,}824a_3 = f_1 \\ a_0 + 2{,}5a_1 + 6{,}25a_2 + 15{,}625a_3 = f_2 \\ a_0 + 2{,}6a_1 + 6{,}76\,a_2 + 17{,}576a_3 = f_3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= -0{,}404885 \\ a_1 &= 0{,}528963 \\ a_2 &= 0{,}107300 \\ a_3 &= 0{,}009667 \end{aligned}}$$

$P_3(x) = -0{,}404885 + 0{,}528963x - 0{,}107300x^2 + 0{,}009667x^3$

$\log(2{,}45) \approx P_3(2{,}45) = 0{,}389170$

Polinômio Interpolador de Lagrange

Teorema (Lagrange): Seja f uma função definida num intervalo [a, b] e conhecida nos pontos (x_i, f_i) i = 0,..., n. Existe um e um só polinómio P_n de grau menor ou igual a n interpolador de f nos pontos dados.

Demonstração: Seja o polinômio P_n definido por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

onde:

$$\boxed{\text{Polin. de grau } n} \leftarrow L_k(x) = \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad k = 1, \ldots, n$$

Fórmula de Lagrange

$$L_k(x) = \prod_{j=0,\, j \neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$L_k(x_i) = \prod_{j=0,\, j \neq k}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i$$

- $P_n(x)$ é um polinômio de grau n, pois é a soma de $L_i(x) f_i$ que é um polinômio de grau n para i = 0, ..., n
- $P_n(x) = f(x)$ para todo x_k, k = 0, ..., n

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x_k) f_i = f_i \text{ para todo } k = 0, \ldots, n$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

Exemplo: Determine o polinômio de grau 3, $P_3(x)$, que passa pelos pontos da tabela abaixo. Em seguida, calcule $P_3(2)$.

x_i	0	1	3	4
f_i	2	4	5	0

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f_i = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + L_2(x) f_2 + L_3(x) f_3$$

$$= L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + L_2(x) f_2 + L_3(x) f_3$$

$$= L_0(x)2 + L_1(x)4 + L_2(x)5 + \cancel{L_3(x)0}$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

x_i	0	1	3	4
f_i	2	4	5	0

$$\boxed{L_k(x) = \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1)(-3)(-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x(x-3)(x-4)}{(1)(-2)(-3)} = \frac{x(x-3)(x-4)}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{(3)(2)(-1)} = \frac{x(x-1)(x-4)}{-6}$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

Exemplo: Determine o polinômio de grau 3, $P_3(x)$, que passa pelos pontos da tabela abaixo. Em seguida, calcule $P_3(2)$.

x_i	0	1	3	4
f_i	2	4	5	0

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x)f_i = L_0(x)2 + L_1(x)4 + L_2(x)5 + \cancel{L_3(x)0}$$

$$P_3(x) = 2\left(\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-12}\right) + 4\left(\frac{x(x-3)(x-4)}{6}\right) + 5\left(\frac{x(x-1)(x-4)}{-6}\right)$$

$$P_3(2) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = \frac{17}{3}$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

Exercício: Determine o polinômio de grau 3, $P_3(x)$, que passa pelos pontos da tabela abaixo. Em seguida, calcule $P_3(1,5)$.

x_i	1	2	3	4
f_i	4	15	40	85

Polinômio Interpolador de Lagrange

Erro

Proposição: Seja f (n+1) vezes derivável o intervalo no intervalo (a, b) e $x_0 < x_1 < ... < x_n \in (a, b)$. Então, para $\forall x \in (a, b), x \neq x_i,$ existe um $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}} \quad \boxed{\text{Erro} \rightarrow E(x)}$$

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

Cota para o Erro

Suponha que exista uma contante M tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $\forall x \in (a, b)$. Então:

$$|E(x)| = |f(x) - P_n(x)| = \prod_{k=0}^{n} |(x - x_k)| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\leq \prod_{k=0}^{n} |(x - x_k)| \frac{M}{(n+1)!}$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

Exemplo: Usando a tabela abaixo, e sabendo que $f(x) = e^x$, determine a aproximação para $e^{1,45}$ por $P_3(1,45)$ e calcule uma cota para o erro cometido.

x	1,0	1,2	1,4	1,6
$f(x)$	2,718	3,320	4,055	4,953

Solução:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f_i = L_0(x)2,718 + L_1(x)3,320 + L_2(x)4,055 + L_3(x)4,953$$

Métodos Numéricos - Interpolação

Polinômio Interpolador de Lagrange

x	1,0	1,2	1,4	1,6
$f(x)$	2,718	3,320	4,055	4,953

$$\boxed{L_k(x) = \prod_{\substack{j=0,\\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,6)}{(1-1,2)(1-1,4)(1-1,6)} = \frac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,6)}{(-0,2)(-0,4)(-0,6)} = \frac{(x-1,2)(x-1,4)(x-1,6)}{-0,048}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-1,4)(x-1,6)}{(1,2-1)(1,2-1,4)(1,2-1,6)} = \frac{(x-1)(x-1,4)(x-1,6)}{(0,2)(-0,2)(-0,4)} = \frac{(x-1)(x-1,4)(x-1,6)}{0,016}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,6)}{(1,4-1)(1,4-1,2)(1,4-1,6)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,6)}{(0,4)(0,2)(-0,2)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,6)}{-0,016}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,4)}{(1,6-1)(1,6-1,2)(1,6-1,4)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,4)}{(0,6)(0,4)(0,2)} = \frac{(x-1)(x-1,2)(x-1,4)}{0,048}$$

Polinômio Interpolador de Lagrange

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f_i = L_0(x)2{,}718 + L_1(x)3{,}320 + L_2(x)4{,}055 + L_3(x)4{,}953$$

$$P_3(x) = 2{,}718\left(\frac{(x-1{,}2)(x-1{,}4)(x-1{,}6)}{-0{,}048}\right) + 3{,}320\left(\frac{(x-1)(x-1{,}4)(x-1{,}6)}{0{,}016}\right)$$

$$4{,}055\left(\frac{(x-1)(x-1{,}2)(x-1{,}6)}{-0{,}016}\right) + 4{,}953\left(\frac{(x-1)(x-1{,}2)(x-1{,}4)}{0{,}048}\right)$$

$P_3(1{,}45)$ = 2,718{ [(1,45 – 1,2) (1,45 – 1,4) (1,45 – 1,6)] / -0,048} +
3,320{ [(1,45 – 1) (1,45 – 1,4) (1,45 – 1,6)] / 0,016} +
4,055{ [(1,45 – 1) (1,45 – 1,2) (1,45 – 1,6)] / -0,016} +
4,953{ [(1,45 – 1) (1,45 – 1,2) (1,45 – 1,4)] / 0,048} = 4,26306

Polinômio Interpolador de Lagrange

Erro

$P_3(1{,}45) = 4{,}26306$

$e^{1{,}45} = 4{,}26311$

$E(1{,}45) = e^{1{,}45} - P_3(1{,}45) = 4{,}26311 - 4{,}26306 = 0{,}00005$

Polinômio Interpolador de Lagrange

Cota para o Erro

$| e^x | \leq M$ para $\forall x \in (1, 1{,}6)$

$| e^{1,6} | = 4.953 \rightarrow M \geq 4.953$

$$|E| \leq \prod_{k=0}^{n} |(x - x_k)| \frac{M}{(n+1)!}$$

$$= |(1{,}45 - 1)(1{,}45 - 1{,}2)(1{,}45 - 1{,}4)(1{,}45 - 1{,}6)| \frac{4{,}953}{4!}$$

$$= 0{,}00017$$