Introdução à Teoria dos Grafos
Lista de Exercícios da Introdução

Bacharelado em Ciência da Computação, DCT–UFMS, 23/3/2005

Entrega em 11/04/2005

1. Construa um grafo de ordem 5 cujos vértices têm graus 1, 2, 2, 3, 4. Qual o tamanho desse grafo?

2. José convidou vinte amigos para uma festa em sua casa. Após todos chegarem, ele perguntou quantas pessoas da festa cada convidado conhecia. Cada um de seus vinte convidados deu uma resposta diferente. Essa situação é possível? Justifique sua resposta.

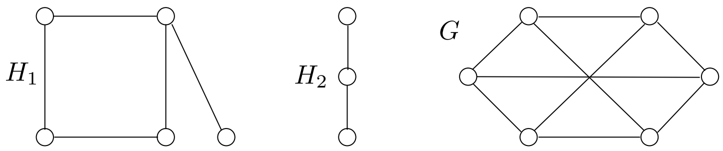
3. Prove que todo grafo de ordem $p \geqslant 2$ tem pelo menos dois vértices de mesmo grau.

4. (a) Construa um grafo r-regular de ordem 8 para cada r, $0 \leqslant r < 8$.
   (b) Determine o complemento de cada grafo construído em (a).
   (c) Prove que se G é um grafo regular, então $\bar{G}$ é regular.

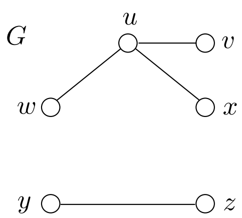
5. Encontre dois grafos 3-regulares e não isomorfos de ordem 6 e tamanho 9.

6. Prove que dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos se e somente se seus complementos são isomorfos.

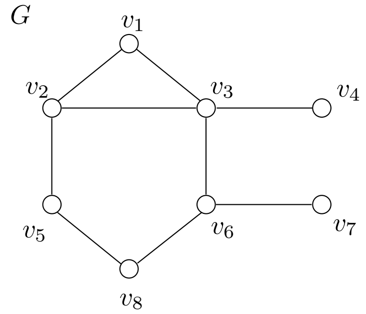
7. (a) Os grafos H_1 e H_2 abaixo são subgrafos de G. Determine se são subgrafos induzidos de G.



   (b) Determine todos os subgrafos geradores de G abaixo. Quais deles são aresta-induzidos?



8. Encontre um subgrafo induzido r-regular de ordem máxima do grafo G abaixo, para $r = 0, 1, 2$.



9. Seja G um grafo. Denote por δ_G, ou simplesmente por δ, o **grau mínimo**, isto é, o menor grau para todos os graus dos vértices de G. Da mesma forma, denote por Δ_G, ou por Δ, o **grau máximo**. Dê um exemplo de um grafo G tal que $k_G = \delta_G = \Delta_G = 2$.

10. (a) Seja G um grafo de ordem p ($\geqslant 2$) e suponha que o grau mínimo δ_G de G é tal que $\delta_G \geqslant (p-1)/2$. Prove que G é conexo. Além disso, mostre que para todo inteiro par p ($\geqslant 2$) existe um grafo desconexo G de ordem p com grau mínimo $\delta_G = (p-2)/2$.

    (b) Se G é um grafo de ordem p com $\Delta_G \geqslant 2$, então mostre que G não necessariamente é conexo.

11. Mostre que um grafo G contém um caminho de comprimento δ_G e, se $\delta_G \geqslant 2$, contém um circuito de comprimento pelo menos $\delta_G + 1$.

12. Prove ou desprove:

    (a) Se v é um vértice de corte de um grafo G então $k_{G-v} = k_G + 1$.

    (b) Se $e = uv$ é uma ponte de um grafo G então existe um único (u, v)-caminho em G.

    (c) Se G é um grafo conexo que não contém pontes então G é não separável.

13. (a) Desenhe um p-cubo, para $p = 1, 2, 3$ e 4.

    (b) Mostre que um p-cubo tem 2^p vértices, $p2^{p-1}$ arestas e é bipartido.

14. Mostre que se G é um grafo completo e bipartido de ordem p e tamanho q então $q \leqslant p^2/4$.