Introdução à Teoria dos Grafos
Lista de Exercícios de Emparelhamentos e Fatorações

Bacharelado em Ciência da Computação, DCT–UFMS, 2/6/2005

1. (a) Mostre que todo n-cubo tem um 1-fator, para $n \geqslant 2$.
   (b) Encontre o número de 1-fatores distintos em K_{2n} e $K_{n,n}$.
2. Mostre que uma árvore tem no máximo um 1-fator.
3. Para cada $r > 1$, encontre um um grafo simples r-regular que não tem um 1-fator.
4. Duas pessoas jogam um jogo sobre um grafo G alternadamente selecionando vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \ldots$ tais que, para $i > 0$, v_i é adjacente a v_{i-1}. O último jogador que conseguir selecionar um vértice vence o jogo. Mostre que o primeiro jogador tem uma estratégia para vencer o jogo *sse* o grafo G não tem um 1-fator.
5. Mostre que é impossível, utilizando retângulos de dimensão 1×2, preencher todo um tabuleiro de xadrez de dimensão 8×8, do qual dois dos seus *cantos* opostos de dimensão 1×1 foram removidos.
6. (a) Mostre que um grafo bipartido G tem um 1-fator *sse* $|N(S)| \geqslant |S|$, para todo $S \subseteq V_G$.
   (b) Dê um exemplo de que a afirmação acima deixa de ser válida se a condição de G ser bipartido não for mais satisfeita.
7. Mostre que uma árvore G tem um 1-fator *sse* $k^1_{G-v} = 1$ para todo $v \in V_G$.
8. Usando o teorema de Tutte (1947), caracterize os grafos maximais que não têm um 1-fator.
9. Mostre que se as pontes de um grafo G 3-regular fazem parte de um único caminho de G, então G tem um 1-fator.
10. Mostre que $C_n \times K_2$ é 1-fatorável para todo $n \geqslant 4$.
11. Encontre uma 1-fatoração para o grafo G da figura a seguir.