Introdução à Teoria dos Grafos
Lista de Exercícios de Árvores

Bacharelado em Ciência da Computação, DCT–UFMS, 25/4/2005

Entrega em 09/05/2005

1. (a) Desenhe todas as árvores com 5 vértices.
   (b) Desenhe todas as árvores T com 7 vértices e com $\Delta_T \geqslant 4$.

2. Mostre que se quaisquer dois vértices de um grafo simples G estão conectados por um único caminho, então G é uma árvore[1].

3. Seja G um grafo de ordem p, tamanho q, tal que $q = p - 1$. Mostre que G não necessariamente é uma árvore.

4. Seja G um grafo de ordem p. Prove o corolário 3.2 visto em sala, isto é, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) G é uma árvore;
   (b) G é conexo e tem tamanho $p - 1$;
   (c) G tem tamanho $p - 1$ e não contém circuitos.

   Observação: para demonstrar que as afirmações acima são equivalentes, deve-se demonstrar que (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c) e (c) $\Rightarrow$ (a).

5. Suponha que T é uma árvore de ordem p que contém somente vértices de grau 1 e 3. Prove que T contém $(p-2)/2$ vértices de grau 3.

6. Seja T uma árvore de ordem 21 cujos vértices têm graus no conjunto $\{1, 3, 5, 6\}$. Suponha que T tem 15 vértices de grau 1 e um vértice de grau 6. Quantos vértices de grau 5 a árvore T possui?

7. (a) Desenhe todas as florestas com 6 vértices.
   (b) Mostre que cada componente de uma floresta é uma árvore.
   (c) G é uma floresta de ordem p, tamanho q, com k componentes se e somente se $q = p - k$.

8. Um grafo conexo G tem seqüência de graus 8, 8, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 3. Quantas arestas devem ser removidas de G para produzir uma árvore geradora de G?

9. Seja G um grafo conexo de ordem $p \geqslant 3$. Mostre que

[1] Esta demonstração prova a volta do teorema 3.4, visto em sala.

(a) se G tem uma ponte, então G tem um vértice de corte;

(b) o contrário de (a) não é necessariamente verdade.

10. Mostre que se G é um grafo conexo de ordem p e com a propriedade que todo subgrafo de $p-1$ vértices é uma árvore geradora, então G é uma árvore ou G é um circuito.

11. Mostre que

   (a) se cada grau em um grafo G é par, então G não tem pontes;

   (b) se G é um grafo r-regular bipartido, com $r \geqslant 2$, então G não tem pontes.