# Introdução à Teoria dos Grafos
# Lista de Exercícios de Árvores

Bacharelado em Ciência da Computação, DCT–UFMS, 25/4/2005

**Entrega em 09/05/2005**

1. (a) Desenhe todas as árvores com 5 vértices.
   (b) Desenhe todas as árvores $T$ com 7 vértices e com $\Delta_T \geqslant 4$.
2. Mostre que se quaisquer dois vértices de um grafo simples $G$ estão conectados por um único caminho, então $G$ é uma árvore[1].
3. Seja $G$ um grafo de ordem $p$, tamanho $q$, tal que $q = p - 1$. Mostre que $G$ não necessariamente é uma árvore.
4. Seja $G$ um grafo de ordem $p$. Prove o corolário 3.2 visto em sala, isto é, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
   (a) $G$ é uma árvore;
   (b) $G$ é conexo e tem tamanho $p - 1$;
   (c) $G$ tem tamanho $p - 1$ e não contém circuitos.

   *Observação:* para demonstrar que as afirmações acima são equivalentes, deve-se demonstrar que (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c) e (c) $\Rightarrow$ (a).
5. Suponha que $T$ é uma árvore de ordem $p$ que contém somente vértices de grau 1 e 3. Prove que $T$ contém $(p - 2)/2$ vértices de grau 3.
6. Seja $T$ uma árvore de ordem 21 cujos vértices têm graus no conjunto $\{1, 3, 5, 6\}$. Suponha que $T$ tem 15 vértices de grau 1 e um vértice de grau 6. Quantos vértices de grau 5 a árvore $T$ possui?
7. (a) Desenhe todas as florestas com 6 vértices.
   (b) Mostre que cada componente de uma floresta é uma árvore.
   (c) $G$ é uma floresta de ordem $p$, tamanho $q$, com $k$ componentes se e somente se $q = p - k$.
8. Um grafo conexo $G$ tem seqüência de graus 8, 8, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 3. Quantas arestas devem ser removidas de $G$ para produzir uma árvore geradora de $G$?
9. Seja $G$ um grafo conexo de ordem $p \geqslant 3$. Mostre que

[1] Esta demonstração prova a volta do teorema 3.4, visto em sala.

(a) se $G$ tem uma ponte, então $G$ tem um vértice de corte;

(b) o contrário de (a) não é necessariamente verdade.

10. Mostre que se $G$ é um grafo conexo de ordem $p$ e com a propriedade que todo subgrafo de $p-1$ vértices é uma árvore geradora, então $G$ é uma árvore ou $G$ é um circuito.

11. Mostre que

    (a) se cada grau em um grafo $G$ é par, então $G$ não tem pontes;

    (b) se $G$ é um grafo $r$-regular bipartido, com $r \geqslant 2$, então $G$ não tem pontes.