Introdução à Teoria dos Grafos

Bacharelado em Ciência da Computação–UFMS, 2005

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Resumo

O Problema do Caixeiro Viajante é um dos mais bem conhecidos e estudados problemas da Teoria dos Grafos. Neste contexto, podemos traduzi-lo para o problema de encontrar um circuito hamiltoniano de menor custo em um grafo com custos nas arestas. Uma das principais questões envolvidas neste problema, e certamente uma das principais questões de toda a Ciência da Computação, é saber se existe um algoritmo eficiente — de tempo polinomial — para computar tal circuito, ou se um algoritmo como este não pode existir, caracterizando-o então como um problema intratável. Quando não conseguimos encontrar uma solução eficiente para um dado problema, e também não conseguimos mostrar que tal solução não existe, devemos utilizar técnicas que nos auxiliem na construção de um algoritmo que nos fornece soluções aproximadas. Apresentaremos neste texto, um algoritmo de tempo polinomial que nos fornece soluções aproximadas para o Problema do Caixeiro Viajante.

1 Motivação

Suponha que a área de atuação de um caixeiro viajante inclua várias cidades, com estradas conectando certos pares destas cidades. Em seu trabalho, há a exigência de que ele visite cada cidade pessoalmente. É possível que o vendedor projete um percurso pelas cidades que o permita visitar cada cidade específica exatamente uma vez e retorne para sua casa? Este problema também é conhecido como o **Problema do Caixeiro Viajante**.

2 Modelagem do Problema em Teoria dos Grafos

O Problema do Caixeiro Viajante tem uma interpretação gráfica bastante natural. Suponha que existam n cidades na região de atuação do vendedor. Seja G um grafo conexo com custos nas arestas tal que os vértices v_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) representam as cidades a serem visitadas, e o custo $c(v_i v_j)$ da aresta $v_i v_j$ denota a distância em quilômetros para percorrer a estrada entre v_i e v_j. Podemos considerar que G é completo, pois mesmo que não exista estrada entre v_i e v_j, podemos sempre definir $c(v_i v_j) = \text{dist}(v_i, v_j)$, para todo par de vértices v_i v_j de V_G. O Problema do Caixeiro Viajante é então apresentado da seguinte forma:

> **Problema** PCV(G, c): *dado um grafo conexo G e uma função custo $c\colon E_G \to \mathbb{Q}_{\geqslant}$ nas arestas do grafo, determinar um circuito hamiltoniano de custo mínimo de G.*

Chamamos o circuito hamiltoniano de custo mínimo de um grafo G simplesmente de **circuito hamiltoniano mínimo de** G.

Existem vários problemas que podem ser formulados como instâncias do Problema do Caixeiro Viajante. Um exemplo ocorre no projeto de sistemas de *hardware*. Tais sistemas possuem muitos módulos, cada um contendo sua própria pinagem, istó é, uma certa quantidade de pinos. A posição física de cada módulo é pré-determinada. Desejamos interconectar um dado subconjunto de pinos por fios, sujeito às seguintes condições: (*i*) no máximo dois fios podem ligar dois pinos (devido ao seu tamanho e possíveis mudanças futuras no *layout* dos fios); (*ii*) o comprimento total dos fios deve ser minimizado (para facilidade e organização da fiação). Esta situação pode ser modelada por um grafo completo com custos nas arestas G. Seus vértices correspondem a um dado conjunto de pinos rotulados com $1, 2, \ldots, n$. O custo $c(ij)$, com $(i < j)$, de uma aresta que conecta o pino i ao pino j é a distância entre o pino i e o pino j. A condição (*i*) determina que devemos encontrar um circuito hamiltoniano em G e a condição (*ii*) especifica que tal circuito deve ter comprimento mínimo. Se introduzimos um pino auxiliar rotulado com 0, e fazemos $c(0i) = 0$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, então o problema da fiação torna-se um Problema do Caixeiro Viajante com $n + 1$ cidades.

Um algoritmo óbvio para solucionar este problema precisa calcular o custo de $(n-1)!/2$ circuitos hamiltonianos de G. A complexidade de tal algoritmo é claramente de ordem exponencial e, dessa forma, é muito ineficiente. Infelizmente, nenhum algoritmo eficiente ainda foi encontrado para solucionar o Problema do Caixeiro Viajante. De fato, o problema de decisão relacionado, apresentado a seguir, é $\mathcal{NP}$-completo:

> **Problema** PCV–Desc(G, c): *dado um grafo completo G, uma função custo $c\colon E_G \to \mathbb{Q}_{\geqslant}$ e uma constante positiva k, existe um circuito hamiltoniano C em G tal que $c(C) \leqslant k$?*

Dizer que o **PCV–Desc** é $\mathcal{NP}$-completo significa dizer que: (*i*) o problema está na classe de complexidades $\mathcal{NP}$, isto é, dado um grafo G, uma função custo c nas arestas de G, uma constante k e uma seqüência de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, podemos verificar se esta seqüência de vértices é um circuito hamiltoniano em G, com custo no máximo k, em tempo polinomial; e (*ii*) o problema é pelo menos tão difícil de ser solucionado quanto qualquer outro problema da classe $\mathcal{NP}$. Um problema que satisfaz esta condição (*ii*) também é dito ser $\mathcal{NP}$**-difícil**.

Baseado nestes fatos, a tentativa de encontrar um algoritmo eficiente para solução do problema PCV deve receber uma prioridade baixa. Em vez disso, muitos algoritmos eficientes foram desenvolvidos e nos fornecem circuitos hamiltonianos com custo "pequeno", mas não necessariamente com custo mínimo. Estes algoritmos, por não fornecerem soluções ótimas, mas sim próximas das soluções ótimas, são chamados **algoritmos de aproximação**. Em geral, estes algoritmos estão sempre associados aos problemas que estão na classe de complexidades $\mathcal{NP}$.

3 Um Algoritmo de Aproximação

Vamos considerar inicialmente que o grafo de entrada para o problema satisfaz a **desigualdade triangular**: $c(v_i v_k) \leqslant c(v_i v_j) + c(v_j v_k)$, para quaisquer i, j e k, com $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, $i \neq j$ e $j \neq k$. Esta consideração é razoável, já que o comprimento de uma estrada direta entre duas cidades v_i e v_k é usualmente não maior que o comprimento de um percuso entre v_i e v_k, passando por uma cidade intermediária v_j.

Considere então que o grafo G satisfaz a desigualdade triangular. Seja T uma árvore geradora mínima de G. A remoção de qualquer aresta de um circuito hamiltoniano C (de custo mínimo) em G produz uma árvore geradora de G. Portanto, $c(T) \leqslant c(C)$.

Seja H um multigrafo euleriano obtido pela duplicação de cada aresta de T. Então, uma trilha fechada euleriana de T fornece um passeio fechado em G, cujo custo é $2c(T)$. A figura 1(b) mostra uma árvore geradora mínima para o grafo com custos da figura 1(a). Assim, $v_2, v_1, v_4, v_3, v_5, v_3, v_4, v_1, v_6, v_1, v_2$ é um passeio fechado de comprimento 26 para o grafo da figura 1(b).

Executamos, agora, uma busca em profundidade em T, começando com um vértice folha de T, isto é, um vértice de grau 1. Sejam $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$ os vértices de T ordenados pelos seus tempos de descoberta na execução do DFS. Então, segue da desigualdade triangular que, o custo de um circuito $C' = v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}, v_{i_1}$ é no máximo o custo de H. Portanto, $c(C') \leqslant 2c(T) < 2c(C)$. A figura 1(c) mostra uma busca em profundidade da árvore na figura 1(b) e a figura 1(d) mostra um circuito hamiltoniano de custo 19 do grafo completo com custo descrito na figura 1(a).

Apresentaremos, agora mais formalmente, o algoritmo que implementa estas idéias que acabamos de descrever.

2APROX–PCV(G, c): algoritmo para determinar um circuito hamiltoniano de custo "pequeno" em um grafo completo G, com $n = p_G \geqslant 3$, com a função custo c satisfazendo a desigualdade triangular.

1: Utilize o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore geradora mínima T de G e c.
2: Conduza uma busca em profundidade em T, utilizando o algoritmos DFS sobre um vértice de grau 1 de T.
3: Se $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$ é a ordem em que os vértices de T são visitados no passo 2, então mostre como resultado o circuito hamiltoniano $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}, v_{i_1}$.

Podemos mostrar que o algoritmo que acabamos de descrever constrói um circuito hamiltoniano C, de um grafo G com custos nas arestas, de tal forma que seu custo nunca ultrapassa, por um fator de 2, o custo de um circuito hamiltoniano ótimo $C^\star$. Ou seja,

$$c(C) \leqslant 2c(C^\star).$$

Em muitos casos, este limitante é bem aceito já que ele foi obtido utilizando um algoritmo eficiente.

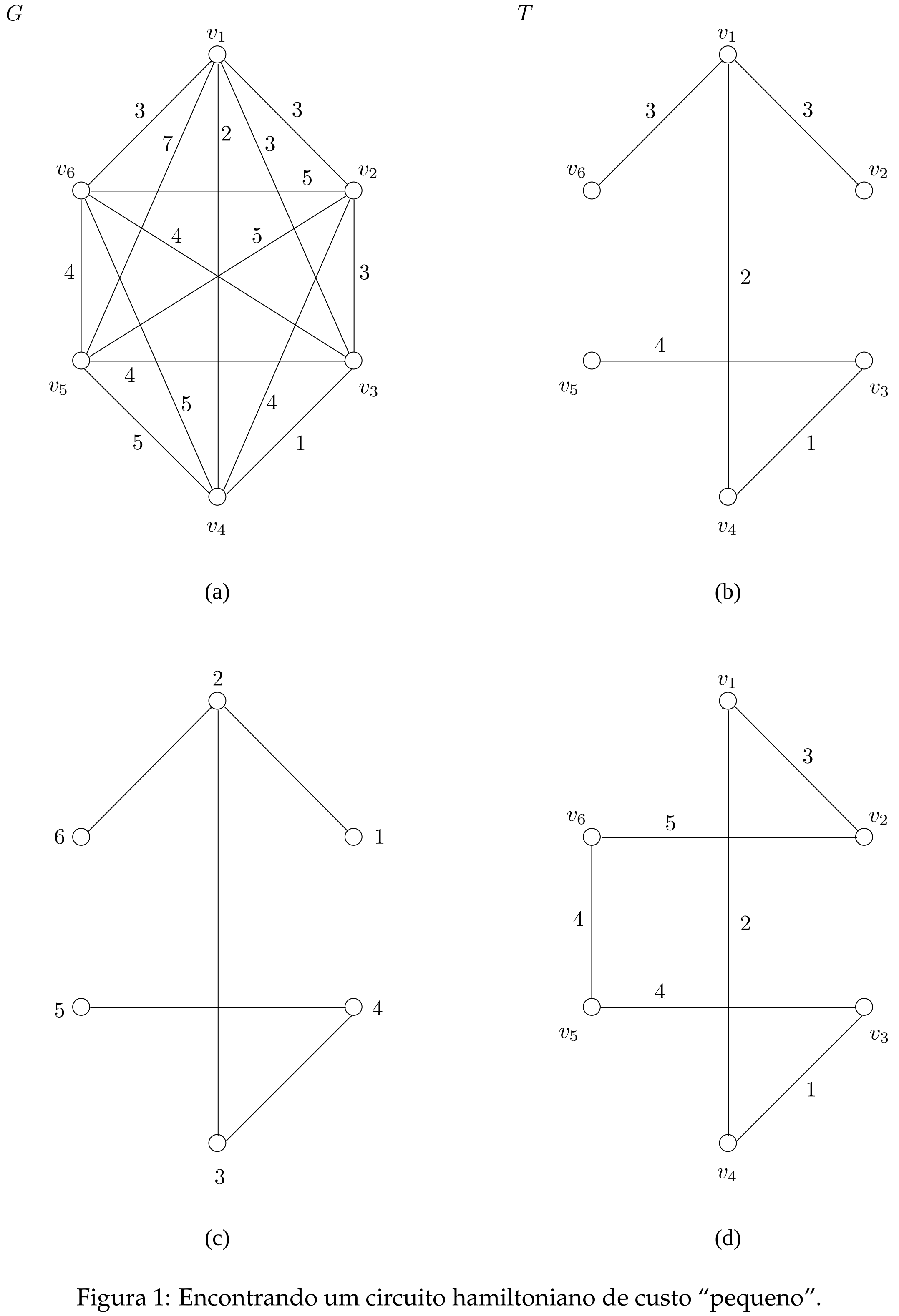

Figura 1: Encontrando um circuito hamiltoniano de custo "pequeno".

Referências

Este texto foi produzido com a consulta às referências [2] e [3]. A história da origem dos grafos hamiltonianos é descrita em Biggs, Lloyd e Wilson em [1]. O Problema do Caixeiro Viajante tem se tornado de extrema importância do ponto de vista comercial. Este problema tem recebido a atenção de muitos autores, incluindo Syslo, Deo and Kowalik [6], e um livro inteiro [5] foi escrito sobre o assunto. Um algoritmo que produz um circuito hamiltoniano (em um grafo completo com custos nas arestas satisfazendo a desigualdade triangular) cujo custo é no máximo $3/2$ do custo de um circuito hamiltoniano mínimo, foi proposto por Christofides [4].

[1] N. L. Biggs, E. K. Lloyd and R. J. Wilson, **Graph Theory 1736-1936**, Claredon Press, Oxford, 1976.

[2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, **Graph Theory with Applications**, North-Holland, 1976.

[3] G. Chartrand and O. R. Oellermann, **Applied and Algorithmic Graph Theory**, McGraw-Hill, Inc., 1993.

[4] N. Christofides, **Worst case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem**, Technical Report, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1976.

[5] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan and D. B. Shmoys, eds., **The Traveling Salesman Problem**, Wiley, 1985.

[6] M. M. Syslo, N. Deo and J. S. Kowalik, **Discrete Optimization with Pascal Programs**, Prentice-Hall, 1983.