Introdução à Teoria dos Grafos

Bacharelado em Ciência da Computação–UFMS, 2005

PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS

Resumo

A teoria dos grafos teve seu início há cerca de 250 anos e aplicações datadas daquela época ainda são encontradas e fazem parte do histórico da área. Quando estudamos grafos eulerianos, vimos uma introdução a estes conceitos e resultados. Veremos aqui uma aplicação clássica da teoria dos grafos eulerianos: o Problema do Carteiro Chinês.

1 Motivação

Suponha que um carteiro deva entregar correspondências em todas as casas de uma pequena cidade. O carteiro gostaria de realizar seu percurso da forma mais eficiente e então retornar ao correio. Conseqüentemente, o carteiro deve planejar um percurso que atravessa toda seção de uma rua entre duas esquinas consecutivas pelo menos uma vez, minimizando o número total de vezes em que ele atravessa uma rua. O problema de encontrar um percurso como este é chamado o **Problema do Carteiro Chinês**, e este nome se deve ao matemático chinês Guan [8] que o formulou pela primeira vez.

2 Modelagem do Problema em Teoria dos Grafos

Podemos molelar a situação descrita acima em um grafo, onde os cruzamentos entre as ruas correspondem aos vértices do grafo e dois vértices são adjacentes se uma seção da rua passa pelos dois cruzamentos correspondentes. O Problema do Carteiro Chinês pode ser reformulado agora em termos da Teoria dos Grafos.

> **Problema** PCC(G): *dado um grafo conexo G, determinar um passeio fechado de menor comprimento que passa por todas as arestas de G.*

Chamamos tal passeio fechado de G, que contém todas suas arestas e tem menor comprimento, de um **passeio fechado euleriano** de G. Note que se G é um grafo euleriano, então um passeio euleriano de G é uma trilha fechada euleriana. Caso contrário, temos um passeio fechado: algumas arestas serão repetidas no passeio fechado euleriano.

Observe também que o grafo conexo G em questão não tem custos nas suas arestas. Ficará claro a seguir que, mesmo para um grafo conexo G com custos nas arestas, teremos em mãos um algoritmo que receberá um grafo conexo G, com ou sem custos nas arestas, e devolverá um passeio fechado euleriano de G.

3 Algoritmo de Fleury

Se G é euleriano, então qualquer trilha fechada euleriana de G é uma trilha ótima, já que uma trilha fechada euleriana é uma trilha fechada que atravessa cada aresta exatamente uma vez. O Problema do Carteiro Chinês pode ser facilmente resolvido neste caso, já que existe um bom algoritmo para determinar uma trilha fechada euleriana em um grafo euleriano. O algoritmo, devido a Fleury (veja Lucas [9]), constrói uma trilha fechada euleriana pela escolha de uma aresta a cada passo, sujeita à condição de que uma aresta de corte, do subgrafo aresta-induzido pelas arestas que não estão nesta trilha, é escolhida somente se não há outra alternativa.

FLEURY(G): recebe um grafo euleriano G e devolve uma trilha fechada euleriana de G.

1: Escolha um vérice arbitrário v_0 em V_G, e faça $W_0 = v_0$.
2: Suponha que a trilha $W_i = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i$ tenha sido construída. Então, escolha uma aresta e_{i+1} de $E_G \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ de tal forma que

   (*i*) e_{i+1} é incidente em v_i;

   (*ii*) a menos que não haja alternativa, e_{i+1} não é uma aresta de corte de

$$G_i = G \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}.$$

3: Pare quando o Passo 2 não puder ser executado.

Por sua descrição, o algoritmo de Fleury constrói uma trilha fechada euleriana de um grafo G, conforme mostra o teorema a seguir.

TEOREMA 3.1 *Se G é euleriano, então qualquer trilha fechada em G construída pelo algoritmo de Fleury é uma trilha fechada euleriana de G.*

□

Se G não é euleriano, então qualquer passeio fechado que contém todas as arestas de G, e em particular um de menor comprimento, atravessa algumas arestas mais que uma vez.

4 O Problema do Carteiro Chinês para Grafos Arbitrários

Uma forma alternativa de resolver o Problema do Carteiro Chinês é determinar, para um dado grafo conexo G, um multigrafo euleriano H, com quantidade mínima de arestas e G é grafo base de H. Observe que se duplicarmos cada aresta de um grafo conexo G, isto é, se trocarmos cada aresta por um par de arestas paralelas, então o resultado é um multigrafo euleriano H, já que H é conexo e $d_H(v) = 2d_G(v)$, para todo $v \in V_G$. Além disso, G é um grafo base de H. Uma trilha fechada euleriana em H produz um passeio fechado em G que contém toda aresta de G. Portanto, todo grafo tem um passeio euleriano de comprimento pelo menos q, mas não maior que $2q$. Se G é um grafo euleriano com q arestas, então o comprimento de uma trilha fechada euleriana de G é q, enquanto que, por exemplo, o comprimento de um passeio euleriano de uma árvore com q arestas é $2q$.

O teorema 4.1 descreve uma fórmula para o tamanho de um passeio euleriano de *qualquer* grafo conexo G. Mais que isso, este resultado formará a base para um algoritmo que produz um passeio euleriano em um grafo conexo. Antes de descrever o teorema 4.1, precisamos de algumas definições.

Se G não é euleriano, então G contém um número par de vértices de grau ímpar. Seja $V_G^1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2n}\}, n \geqslant 1$, o conjunto de vértices de grau ímpar de G. Uma **partição dupla** de V_G^1 é uma partição de V_G^1 em n subconjuntos de tamanho 2. Para uma partição par π, dada por

$$\pi = \{\{u_{11}, u_{12}\}, \{u_{21}, u_{22}\}, \ldots, \{u_{n1}, u_{n2}\}\},$$

definimos $D(\pi)$ como

$$D(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \text{dist}_G(u_{i1}, u_{i2})$$

e definimos

$$m_G = \min_{\pi}\{D(\pi)\},$$

onde o mínimo é obtido de todas as partições pares π de V_G^1. Se G é euleriano temos que $V_G^1 = \emptyset$, e então definimos $m_G = 0$. Por exemplo, se um grafo G tem quatro vértices de grau ímpar u_1, u_2, u_3, e u_4, então V_G^1 tem três partições duplas $\pi_1 = \{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}\}, \pi_2 = \{\{u_1, u_3\}, \{u_2, u_4\}\}$ e $\pi_3 = \{\{u_1, u_4\}, \{u_2, u_3\}\}$. O teorema 4.1 a seguir apresenta um importante resultado.

TEOREMA 4.1 [Goodman & Hedetniemi [7]]
Se G é um grafo conexo de tamanho q, então um passeio fechado euleriano de G tem comprimento $q+m_G$.

□

Uma vez que encontramos uma partição dupla

$$\pi = \{\{u_{11}, u_{12}\}, \{u_{21}, u_{22}\}, \ldots, \{u_{n1}, u_{n2}\}\}$$

de V_G^1 para a qual $m_G = D(\pi)$, podemos determinar um caminho Q_i de u_{i1} para u_{i2} de comprimento mínimo $\text{dist}_G(u_{i1}, u_{i2})$ em G, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Pela duplicação das arestas de G que estão em Q_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, obtemos um multigrafo euleriano H que tem G como grafo base. Uma trilha fechada euleriana de H pode então ser obtida com o algoritmo de Fleury, que gera um passeio fechado euleriano em G.

O teorema 4.1 fornece uma possível solução para o Problema do Carteiro Chinês. Entretanto, esta solução necessita de determinar todas as partições pares π de V_G^1, e então computa

$m_G = \min\{D(\pi)\}$. Este processo não é eficiente, já que o número de partições pares de V_G^1 é $O(n^n)$, onde $2n$ é o número de vértices de grau ímpar de G.

Felizmente, existe uma forma eficiente de determinar uma partição par π de V_G^1 para qual $m_G = D(\pi)$. Iniciamos nosso algoritmo construindo um grafo completo $F \cong K_{2n}$ com custos nas arestas. Os vértices de F correspondem aos vértices de grau ímpar de G, e são rotulados com os mesmos nomes. O custo de uma aresta de F é definido como a distância, ou o comprimento do menor caminho, entre os vértices correspondentes em G. O algoritmo BFS[1], ou o algoritmo de Djikstra[2], podem ser utilizados para computar a distância entre todos os pares de vértices de grau ímpar de G.

Então, o próximo passo é determinar um emparelhamento perfeito de F, cujo custo total é o menor possível. Seja μ o maior custo das arestas de F, e seja $\mu' = \mu + 1$. Seja F' o grafo completo com custos, com $2n$ vértices, obtido pela troca do custo de cada aresta e de F por $\mu' - c_{F'}(e)$, isto é, $c_{F'}(e) = \mu' - c_F(e)$. Como Edmonds [4] desenvolveu um algoritmo eficiente para encontrar um emparelhamento de valor máximo em um grafo com custos nas arestas, podemos agora aplicá-lo ao grafo F' para obter um emparelhamento perfeito de valor máximo $M = \{u_{11}u_{12}, u_{21}u_{22}, \ldots, u_{n1}u_{n2}\}$. Então M é um emparelhamento perfeito de custo mínimo em F e assim, $\pi = \{\{u_{11}, u_{12}\}, \{u_{21}, u_{22}\}, \ldots, \{u_{n1}, u_{n2}\}\}$ é uma partição dupla de V_G^1 para qual $m_G = D(\pi)$.

Em seguida, após termos determinado o menor caminho Q_i de u_{i1} para u_{i2}, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, duplicamos as arestas de G que aparecem em Q_i. Este método produz um multigrafo euleriano H com G seu grafo base. Finalmente, devemos encontrar uma trilha fechada euleriana de H, utilizando o algoritmo de Fleury. Esta trilha fechada euleriana de H corresponde a um passeio fechado euleriano de G. Um exemplo de execução deste algoritmo é mostrado na figura 1.

A figura 1(a) mostra um grafo G com quatro vértices de grau ímpar u_1, u_2, u_3 e u_4. As figuras 1(b) e 1(c) mostram os grafos completos com custos nas arestas F e F'. Observe que $M = \{u_1u_2, u_3u_4\}$ é um emparelhamento perfeito de valor máximo para F'. Portanto, $\pi = \{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}\}$ é uma partição dupla de V_G^1 tal que $D(\pi) = m_G$. Como $\text{dist}_G(u_1, u_2) = 1$ e $\text{dist}_G(u_3, u_4) = 3$, segue que $m_G = 4$. O multigrafo H pode ser obtido pela duplicação das arestas do menor caminho de u_1 para u_2, bem como do menor caminho de u_3 para u_4. Como

$$u_1, e_{12}, u_2, e_{10}, v_3, e_3, v_4, e_1, u_4, e_2, v_4, e_4, v_3, e_7, v_2, e_8, u_3, e_5, v_3, e_6, u_3, e_9, v_1, e_{11}, u_2, e_{13}, u_1$$

é uma trilha fechada euleriana para H, segue que

$$u_1, u_2, v_3, v_4, u_4, v_4, v_3, v_2, u_3, v_3, u_3, v_1, u_2, u_1$$

é um passeio fechado euleriano de G.

[1] Algoritmo de Moore.

[2] Considerando G um grafo com custos nas arestas, onde o custo $c(e) = 1$, para toda aresta $e \in E_G$.

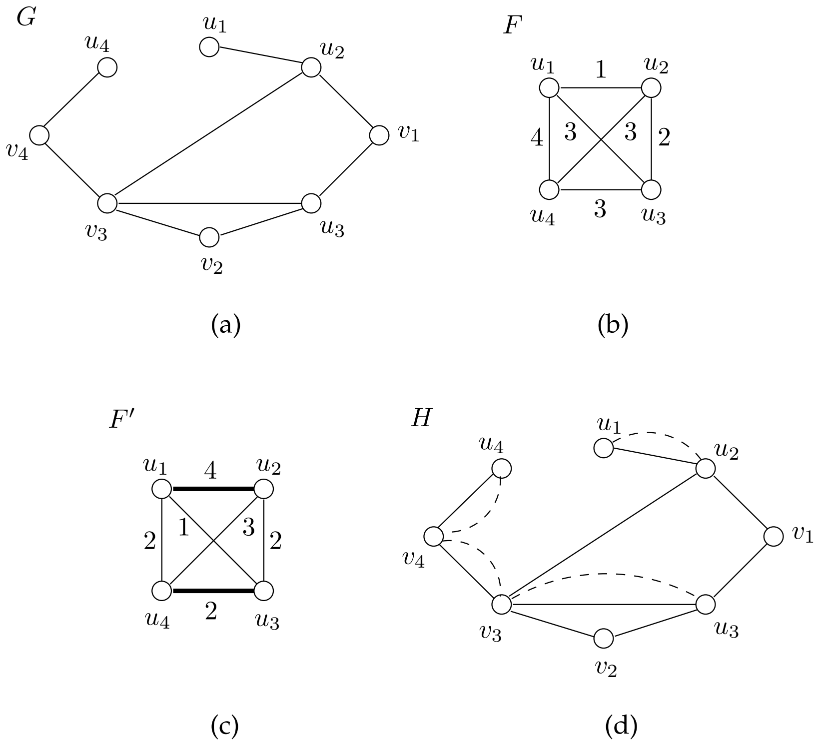

Figura 1: Resolvendo o problema do carteiro chinês.

PCC(G): recebe um grafo G e devolve um passeio fechado euleriano de G.

1: Seja $V_G^1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2n}\}, n \geqslant 1$, o conjunto de vértices de grau ímpar do grafo G. Execute o BFS(G, u_k), para algum k, $1 \leqslant k \leqslant 2n$. Obtenha, dessa forma, o menor caminho e seus comprimentos, para cada par de vértices de grau ímpar de G;

2: Construa um grafo completo com custos nas arestas $F \cong K_{2n}$, tal que seus vértices correspondem aos vértices de grau ímpar de G e o custo de uma aresta de F é definido como a distância entre os vértices correspondentes em G;

3: Seja μ o maior custo das arestas de F e seja $\mu' = \mu + 1$. Construa F' o grafo completo com custos nas arestas, com $2n$ vértices, através da troca do custo de cada aresta e de F por $\mu' - c_F(e)$, isto é, $c_{F'}(e) = \mu' - c_F(e)$;

4: Encontre um emparelhamento perfeito de valor máximo $M = \{u_{11}u_{12}, u_{21}u_{22}, \ldots, u_{n1}u_{n2}\}$ em F'. Então M é um emparelhamento perfeito de custo mínimo em F e assim, $\pi = \{\{u_{11}, u_{12}\}, \{u_{21}, u_{22}\}, \ldots, \{u_{n1}, u_{n2}\}\}$ é uma partição dupla de V_G^1 para qual $m_G = D(\pi)$;

5: Para o menor caminho Q_i de u_{i1} para u_{i2}, com $i = 1, 2, \ldots, n$, duplique as arestas de G que aparecem em Q_i. Seja H o multigrafo euleriano produzido neste processo;

6: Utilize o algoritmo de Fleury para encontrar uma trilha fechada euleriana de H. Esta trilha fechada euleriana de H corresponde a um passeio fechado euleriano de G.

Referências

Este texto foi produzido com a consulta às referências [2] e [3]. A Teoria dos Grafos Eulerianos, e a Teoria dos Grafos como um todo, teve seu início com o artigo de L. Euler [5] e a história desta teoria foi documentada por Biggs, Lloyd e Wilson em [1]. O livro de Fleischner [6] é inteiramente destinado a esta teoria. O Problema do Carteiro Chinês foi proposto por Guan em [8] e o algoritmo de Fleury para solução deste problema se encontra em [9]. O algoritmo de Edmonds [4] deve ser utilizado quando trabalhamos sobre grafos não eulerianos.

[1] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Claredon Press, Oxford, 1976.

[2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, North-Holland, 1976.

[3] G. Chartrand and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill, Inc., 1993.

[4] J. Edmonds, *Maximum matching and a polyhedron with 0,1 vertices*, J. Res. Nat. Bur. Standards, 69 B, pp. 125-130, 1965.

[5] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sci. Petropolitanae, 8, pp. 128-140, 1736.

[6] H. Fleischner, *Eulerian Graphs and Related Topics (Part 1, Volume 1)*, North-Holland, 1990.

[7] S. E. Goodman and S. T. Hedetniemi, *Eulerian walks in graphs*, SIAM J. Comput., 2, pp. 16-27, 1973.

[8] M. Guan, *Graphic programming using odd or even points*, Acta Math. Sinica, 10, pp. 263-266, 1960; Chinese Math., 1, pp. 273-277, 1962.

[9] E. Lucas, *Récréations Mathématiques IV*, Paris, 1921.