# Introdução à Teoria dos Grafos

Bacharelado em Ciência da Computação–UFMS, 2005

# Grafos Orientados

**Resumo**

Existem ocasiões onde grafos não são apropriados para descrever certas situações. Por exemplo, um mapa de ruas em que algumas delas são de mão única não pode ser representado adequadamente por um grafo. No entanto, podemos utilizar grafos orientados, grafos dirigidos ou digrafos, para representações como essas. Como muitas das definições e propriedades para grafos orientados são herdadas dos conceitos correspondentes em grafos, o texto a seguir é resumido e intuitivo. Esse texto é baseado no livro de Chartrand & Oellermann (1993) e Bondy & Murty (1977).

Um **grafo orientado**, **grafo dirigido** ou **digrafo**, $D$ é um conjunto finito e não vazio $V_D$ de **vértices** e um (possivelmente vazio) conjunto $E_D$ de pares ordenados de vértices distintos. Os elementos em $E_D$ são chamados **arcos**. Como grafos, grafos orientados podem ser representados por diagramas. Os vértices de um grafo orientado $D$ são indicados por pequenos círculos e um arco $(u, v)$ de $D$ é representado por um segmento de reta *dirigido* do vértice $u$ para $v$. Como $(u, v)$ e $(v, u)$ são arcos distintos, dois vértices podem ser ligados por dois arcos se têm direções opostas. Um grafo orientado $D$ com $V_D = \{u, v, w, x\}$ e $E_D = \{(u, w), (v, u), (v, w), (w, x), (x, w)\}$ é mostrado na figura 1.

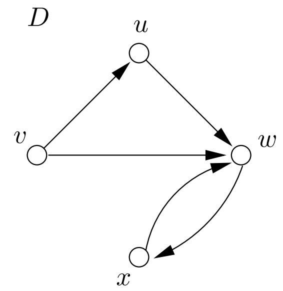


Figura 1: Exemplo de um grafo orientado.

O **grafo base** de um grafo orientado $D$ é o grafo $G$ obtido de $D$ pela troca de todos os arcos $(u, v)$ ou $(v, u)$ pela aresta $uv$. Um grafo orientado $D$ e seu grafo base $G$ são mostrados na figura 2.

O número de vértices de um grafo orientado $D$ é chamado sua **ordem** e o número de arcos em $D$ o seu **tamanho**. Se $(u, v)$ é um arco de $D$ então $u$ é dito ser **adjacente em** $v$ e $v$ é **adjacente de** $u$. Além disso, o arco $(u, v)$ é **incidente em** $v$ e **incidente de** $u$. O **grau de saída** $d^+(v)$ de um vértice $v$ em um grafo orientado $D$ é o número de vértices adjacentes de $v$ e o **grau de**

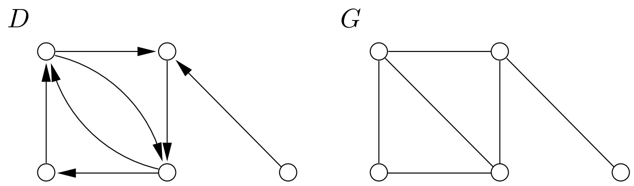


Figura 2: O grafo base $G$ de um grafo orientado $D$.

**entrada** $d^-(v)$ é o número de vértices adjacentes em $v$. O **grau** $d(v)$ de um vértice $v$ de um grafo orientado $G$ é definido como $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$. Na figura 1, por exemplo, temos o seguinte:

| Vértice | Grau de saída | Grau de entrada | Grau |
|---|---|---|---|
| $u$ | 1 | 1 | 2 |
| $v$ | 2 | 0 | 2 |
| $w$ | 1 | 3 | 4 |
| $x$ | 1 | 1 | 2 |

O primeiro teorema da teoria dos grafos orientados é análogo ao primeiro teorema da teoria dos grafos.

TEOREMA 0.1 *Seja $D$ um grafo orientado de ordem $p$ e tamanho $q$, com $V_D = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Então,*

$$\sum_{i=1}^{p} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{p} d^-(v_i) = q.$$

PROVA.

Quando os graus de saída dos vértices de $D$ são somados, cada arco de $D$ é contado exatamente uma vez. Essa sentença também é verdadeira para graus de entrada.

❑

Grafos orientados isomorfos têm a definição esperada. Dois grafos orientados $D_1$ e $D_2$ são **isomorfos** se existe uma função bijetiva $\phi$ (um **isomorfismo**) de $V_{D_1}$ em $V_{D_2}$ tal que $(u, v)$ é um arco de $D_1$ se e somente se $(\phi(u), \phi(v))$ é um arco de $D_2$. Informalmente, $D_1$ e $D_2$ são isomorfos se e somente se um deles pode ser desenhado como o outro.

**Subgrafos orientados** e **subgrafos orientados induzidos** são definidos da mesma forma como em grafos. Na figura 3 temos um subgrafo orientado $H_1$ de $G$ e um subgrafo orientado induzido $H_2$ de $G$.

Um **passeio** em um grafo orientado $D$ é uma seqüência alternante

$$W: v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \qquad (n \geqslant 0)$$

de vértices e arcos, começando e terminando com vértices, tal que $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in V_D$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. O passeio $W$ é chamado um $(v_o, v_n)$-passeio e tem **comprimento** $n$. Como

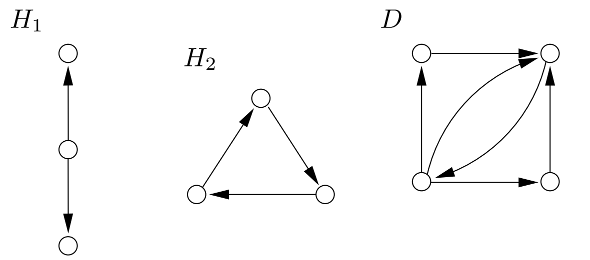


Figura 3: Subgrafos orientados ($H_1$ e $H_2$) e subgrafo orientado induzido ($H_1$) do grafo orientado $D$.

no caso de grafos, o passeio pode ser expresso mais simplesmente como $W: v_o, v_1, \ldots, v_n$. Os conceitos de trilha, caminho, circuito e ciclo em grafos orientados são definidos analogamente àqueles em grafos, exceto que em grafos orientados sempre procedemos na direção dos arcos. Note que circuitos de comprimento 2 são possíveis em grafos orientados.

Um **semipasseio** em um grafo orientado $D$ é uma seqüência alternante

$$W: v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \qquad (n \geqslant 0)$$

de vértices e arcos tal que ou $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in V_D$ ou $e_i = (v_i, v_{i-1}) \in V_D$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. O semipasseio W é um $(v_0, v_n)$-semipasseio de **comprimento** $n$. Para o grafo orientado $D$ da figura 4,

$$W: v, (v, w), w, (u, w), u, (x, u), x$$

é um $(v, x)$-semipasseio que não é um $(v, x)$-passeio. De fato, $D$ não contém um $(v, x)$-passeio. Como um semipasseio desconsidera as direções de seus arcos, ele corresponde a um passeio no seu grafo base.

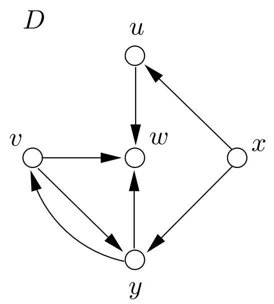


Figura 4: Passeios e semipasseios.

Dois vértices $u$ e $v$ em um grafo orientado $D$ estão **conectados** se $D$ contém um $(u, v)$-semipasseio. Um grafo orientado $D$ é **conexo** se todo par de vértices de $D$ está conectado, isto é, $D$ é conexo se seu grafo base é conexo. O grafo orientado da figura 4 é conexo. Grafos orientados desconexos e componentes de grafos orientados desconexos são definidos da mesma forma como em grafos.

No caso de grafos orientados existe mais de um tipo de conexidade. Um grafo orientado que é conexo também pode ser chamado de **fracamente conexo**. Um grafo orientado $D$ é **unilateralmente conexo** se para todo par de vértices distintos $u$ e $v$ de $D$ existe um $(u, v)$-caminho, ou um $(v, u)$-caminho, ou ambos. Um grafo orientado é **fortemente conexo** se para todo par de vértices $u$ e $v$ de $D$ existe um $(u, v)$-caminho bem como um $(v, u)$-caminho em $D$. Portanto, um grafo orientado fortemente conexo é unilateralmente conexo e todo grafo orientado unilateralmente conexo é fracamente conexo, mas nenhuma das sentenças contrárias é verdadeira. O grafo $D$ da figura 4 não é unilateralmente conexo e, é claro, não é fortemente conexo. O grafo oreintado $D_1$ da figura 5 é unilateralmente conexo mas não fortemente conexo, enquanto que $D_2$ é fortemente conexo.

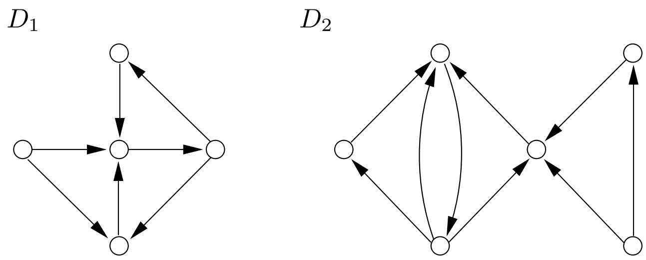


Figura 5: Grafos orientados unilateralmente e fortemente conexos.

Um grafo orientado $D$ é **regular** se existe um inteiro não negativo $r$ tal que $d^+(v) = d^-(v) = r$ para todo vértice $v$ de $D$. Tal grafo orientado é chamado $r$**-regular**.

Chamamos um grafo orientado $D$ de **simétrico** se sempre que $(u, v)$ é um arco de $D$ então $(v, u)$ também é um arco de $D$. Se $D$ é um grafo orientado simétrico então $D$ pode ser obtido de algum grafo $G$ pela substituição de cada aresta $uv$ de $G$ por arcos $(u, v)$ e $(v, u)$ e então escrevemos $D = G^*$. Os grafos orientados simétricos $K^*_{1,3}$, $P^*_4$ e $K^*_3$ são mostrados na figura 6.

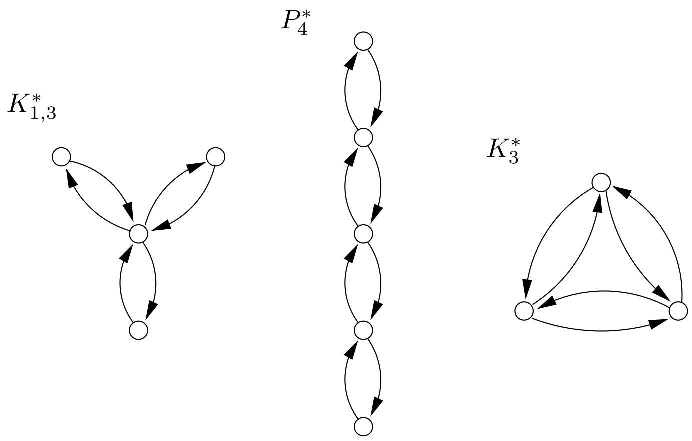


Figura 6: Grafos orientados simétricos.

No outro extremo, um grafo orientado $D$ é dito ser **assimétrico** se sempre que $(u, v)$ é um arco de $D$ então $(v, u)$ não é um arco de $D$. Assim, um grafo orientado assimétrico tem a propriedade que todo par de vértices é ligado por no máximo um arco. Um grafo orientado em que todo par de vértices é ligado por exatamente um arco é chamado um **torneio**. A figura 7 mostra dois grafos orientados assimétricos; $D_1$ é um torneio e $D_2$ não é.

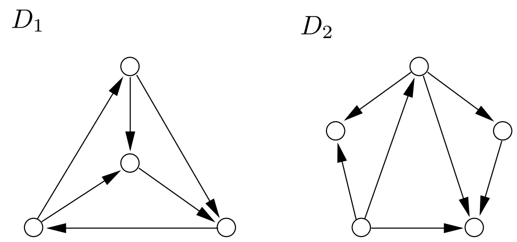


Figura 7: Grafos orientados assimétricos.

Finalmente, Se arcos paralelos são permitidos em um grafo orientado então obtemos um **multigrafo orientado**; se, além disso, laços orientados são permitidos, temos então um **pseudografo orientado**. Um multigrafo orientado $D_3$ e um pesudografo orientado $D_4$ são apresentados na figura 8.

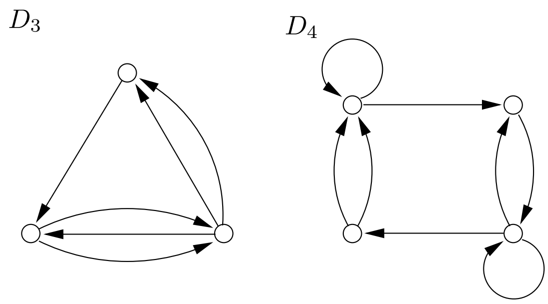


Figura 8: Um multigrafo e um pseudografo orientados.

## Referências

Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. (1977). *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press LTD.

Chartrand, G. & Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc.