1.2 Grau de um vértice

- Seja G um grafo. Para um vértice v de V_G, sua vizinhança $N_G(v)$ (ou $N(v)$) é definida por

$$N(v) = \{u \in V_G | vu \in E_G\}.$$

1.2 Grau de um vértice

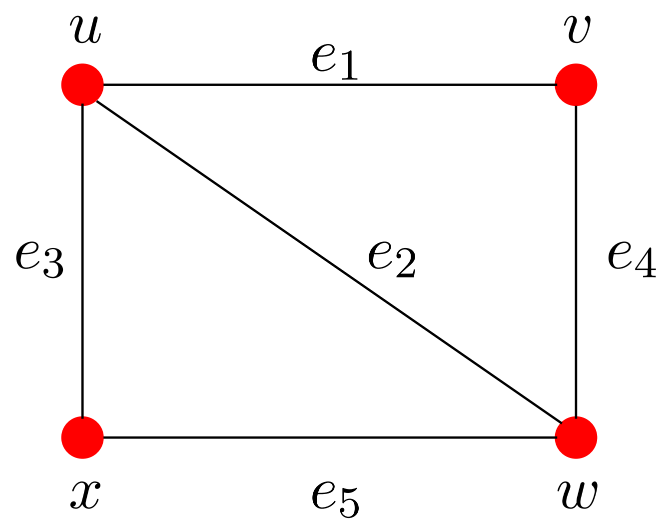
- Seja G um grafo. Para um vértice v de V_G, sua vizinhança $N_G(v)$ (ou $N(v)$) é definida por

$$N(v) = \{u \in V_G | vu \in E_G\}.$$

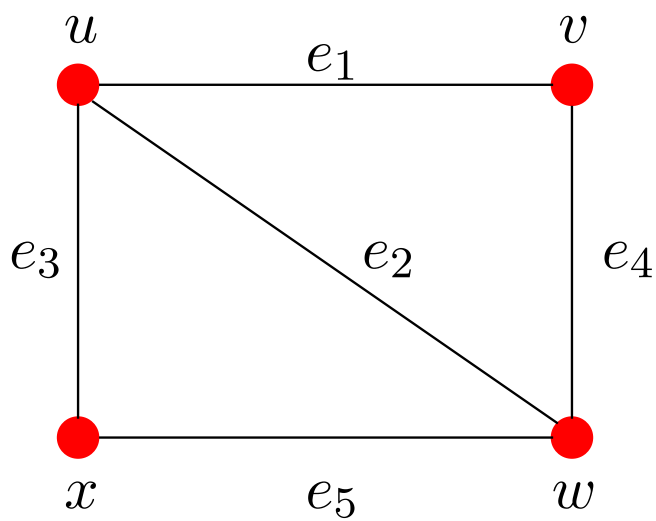
- O grau $d_G(v)$ (ou $d(v)$) do vértice v em G é o número de vértices adjacentes a v, isto é,

$$d(v) = |N(v)|.$$

1.2 Grau de um vértice

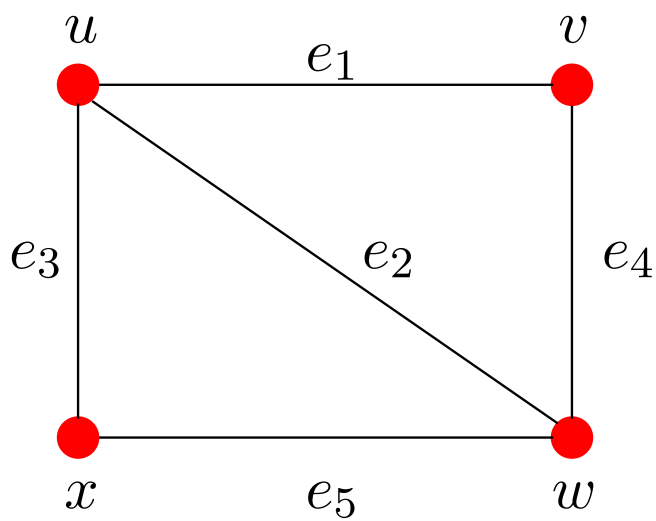


1.2 Grau de um vértice



$$p = 4, q = 5$$

1.2 Grau de um vértice



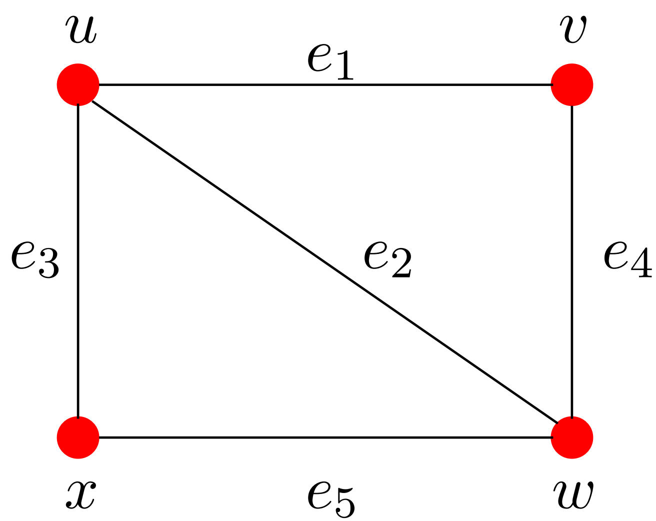
$$p = 4, q = 5$$

$$N(v) = \{u, w\}, d(v) = 2.$$

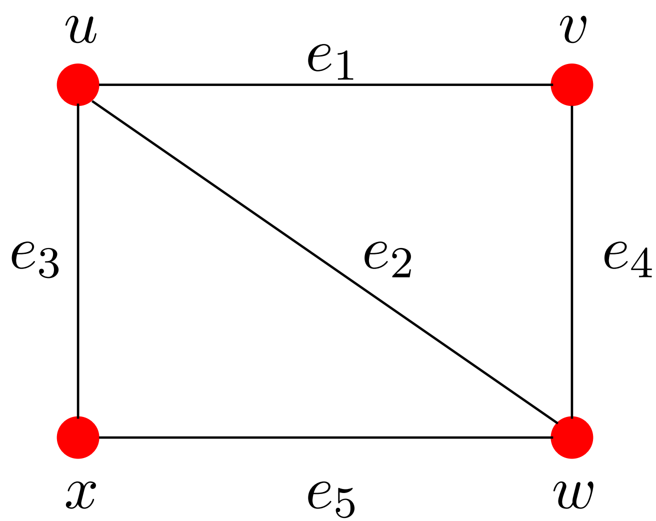
1.2 Grau de um vértice

- Se $e = uv$ é uma aresta de um grafo G então dizemos que e e u são incidentes, assim como e e v. Se e e f são arestas distintas e que são incidentes no mesmo vértice, então e e f são arestas adjacentes.

1.2 Grau de um vértice

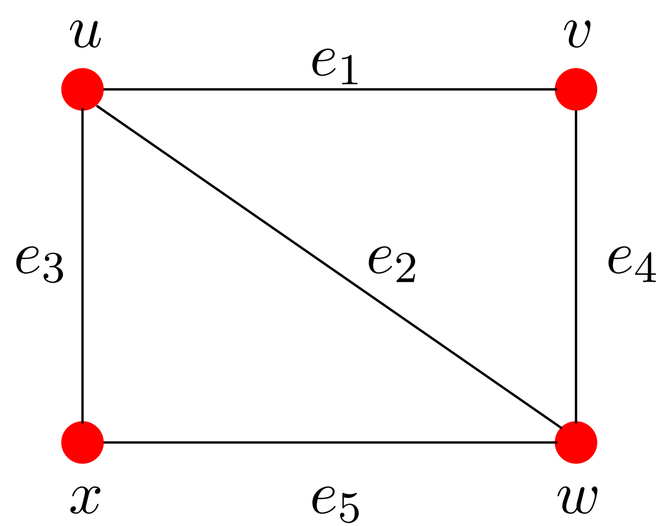


1.2 Grau de um vértice



- u e e_1 são incidentes, mas w w e_1 não são.

1.2 Grau de um vértice



- u e e_1 são incidentes, mas w w e_1 não são.
- e_1 e e_2 são arestas adjacentes, enquanto e_1 e e_5 não são.

1.2 Grau de um vértice

- O grau de um vértice v em um grafo G também pode ser visto como a quantidade de arestas incidentes em v.

1.2 Grau de um vértice

- O grau de um vértice v em um grafo G também pode ser visto como a quantidade de arestas incidentes em v.
- Se G tem ordem p e v é um vértice de G, então

$$0 \leqslant d(v) \leqslant p - 1.$$

1.2 Grau de um vértice

- O grau de um vértice v em um grafo G também pode ser visto como a quantidade de arestas incidentes em v.
- Se G tem ordem p e v é um vértice de G, então

$$0 \leqslant d(v) \leqslant p - 1.$$

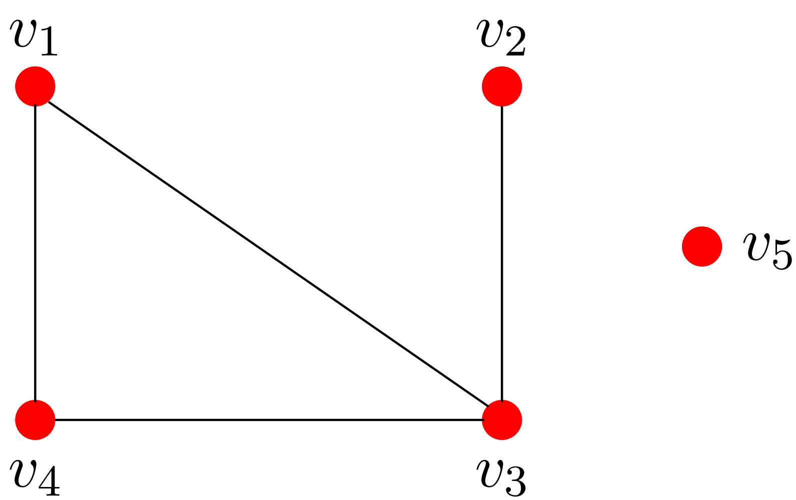
- Um vértice de grau 0 é chamado vértice isolado.

1.2 Grau de um vértice

- Um vértice é par ou ímpar se seu grau é par ou ímpar.

1.2 Grau de um vértice

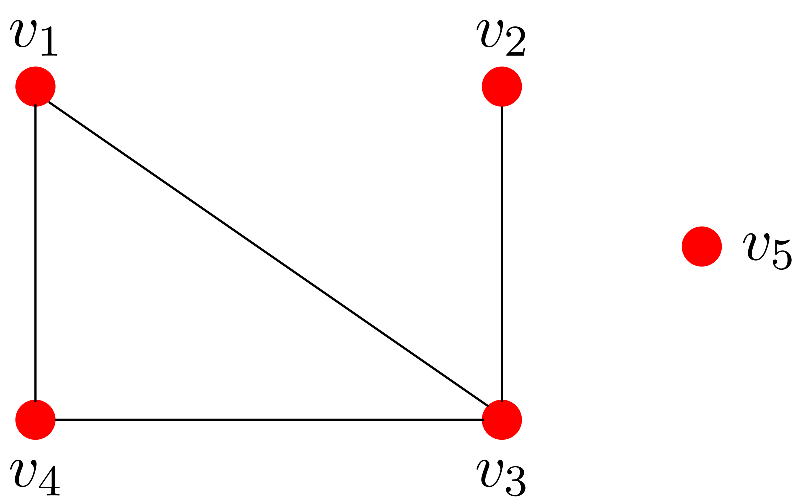
- Um vértice é par ou ímpar se seu grau é par ou ímpar.



$$d(v_1) = 2$$
$$d(v_2) = 1$$
$$d(v_3) = 3$$
$$d(v_4) = 2$$
$$d(v_5) = 0$$

1.2 Grau de um vértice

- Um vértice é par ou ímpar se seu grau é par ou ímpar.



$$
\begin{aligned}
d(v_1) &= 2\\
d(v_2) &= 1\\
d(v_3) &= 3\\
d(v_4) &= 2\\
d(v_5) &= 0
\end{aligned}
$$

- Observe que

$$\sum_{i=1}^{5} d(v_i) = 8.$$

1.2 Grau de um vértice

Teorema 1.2 (Primeiro Teorema da Teoria dos Grafos)
Seja G um grafo de ordem p e tamanho q, com
$V_G = \{v_1, \ldots v_p\}$. Então,

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q.$$

1.2 Grau de um vértice

Teorema 1.2 (Primeiro Teorema da Teoria dos Grafos)
Seja G um grafo de ordem p e tamanho q, com
$V_G = \{v_1, \dots v_p\}$. Então,

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q.$$

Corolário 1.3 Todo grafo contém um número par de vértices ímpares.

1.2 Grau de um vértice

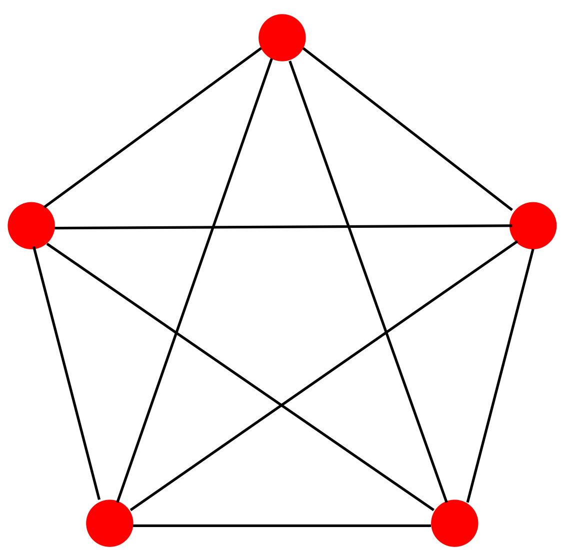
- Um grafo G é r-regular, ou regular de grau r, se todo vértice de G tem grau r.

1.2 Grau de um vértice

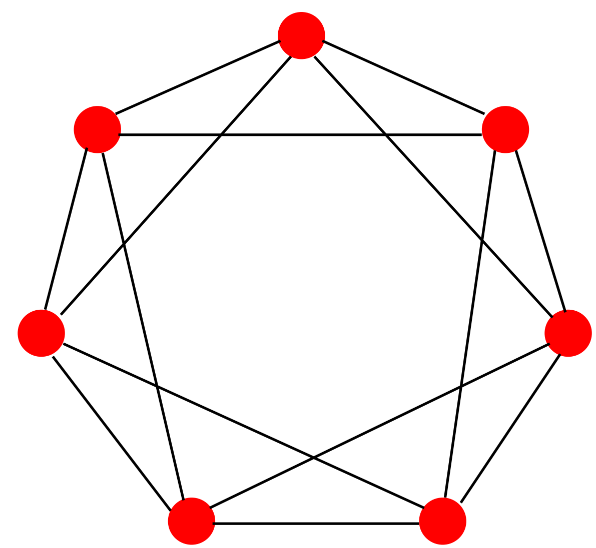
- Um grafo G é r-regular, ou regular de grau r, se todo vértice de G tem grau r.
- Um grafo é dito regular se é r-regular para algum inteiro não negativo r.

1.2 Grau de um vértice

- Um grafo G é r-regular, ou regular de grau r, se todo vértice de G tem grau r.
- Um grafo é dito regular se é r-regular para algum inteiro não negativo r.



G_1



G_2

1.2 Grau de um vértice

- Se G é um grafo r-regular de ordem p, então é claro que $0 \leqslant r \leqslant p - 1$.

1.2 Grau de um vértice

- Se G é um grafo r-regular de ordem p, então é claro que $0 \leqslant r \leqslant p - 1$.
- Entretanto, se $0 \leqslant r \leqslant p - 1$, não necessariamente existe um grafo r-regular de ordem p.

1.2 Grau de um vértice

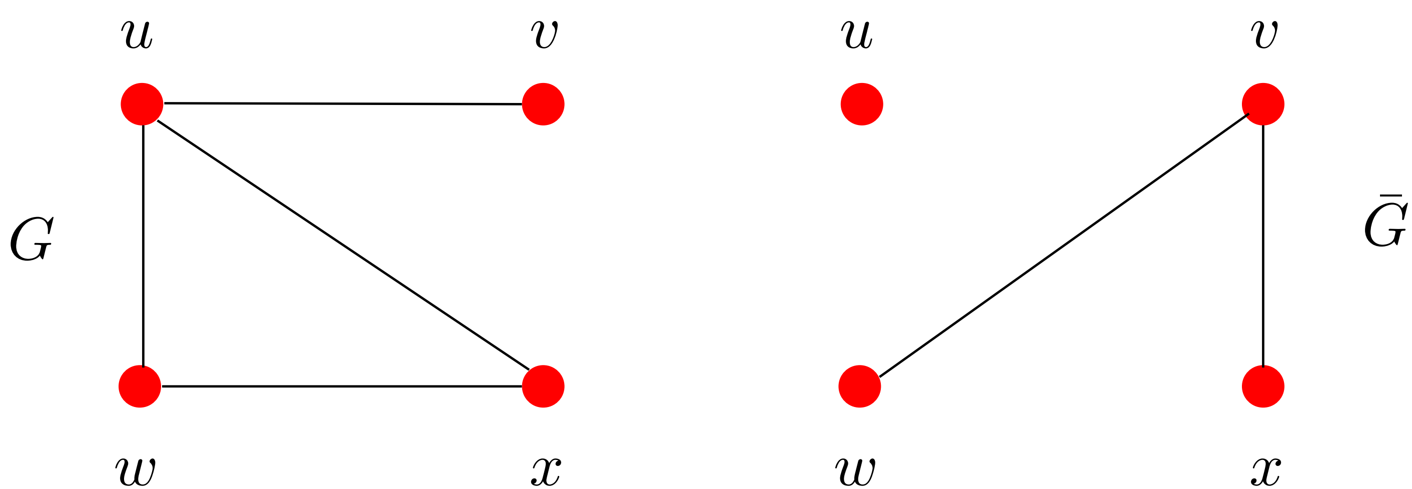
- Se G é um grafo r-regular de ordem p, então é claro que $0 \leqslant r \leqslant p - 1$.
- Entretanto, se $0 \leqslant r \leqslant p - 1$, não necessariamente existe um grafo r-regular de ordem p.
- Por exemplo, não existe um grafo 1-regular de ordem 5 ou um grafo 3-regular de ordem 5.

1.2 Grau de um vértice

- O complemento $\bar{G}$ de um grafo G é o grafo com $V_{\bar{G}} = V_G$ e tal que uv é uma aresta de $\bar{G}$ se e somente se uv *não* é uma aresta de G.

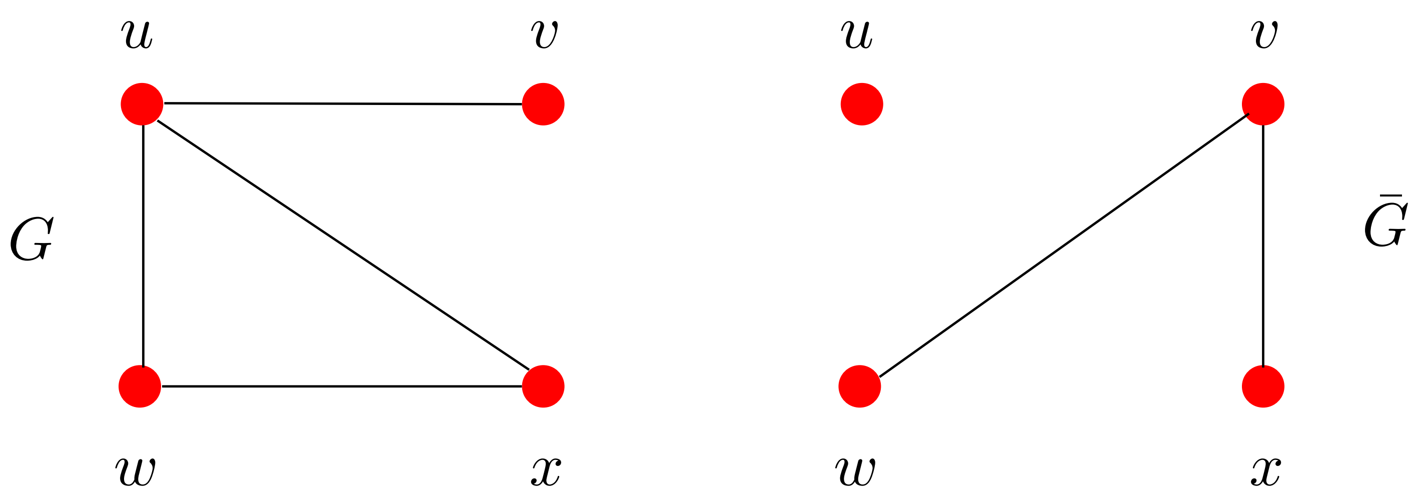
1.2 Grau de um vértice

- O complemento $\bar{G}$ de um grafo G é o grafo com $V_{\bar{G}} = V_G$ e tal que uv é uma aresta de $\bar{G}$ se e somente se uv *não* é uma aresta de G.



1.2 Grau de um vértice

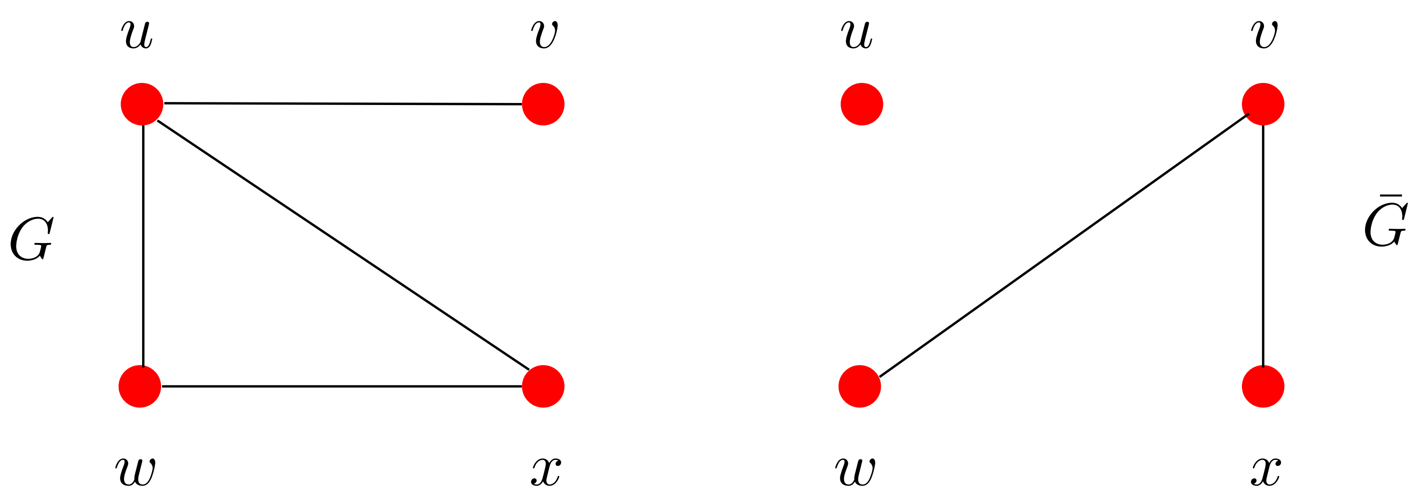
- O complemento $\bar{G}$ de um grafo G é o grafo com $V_{\bar{G}} = V_G$ e tal que uv é uma aresta de $\bar{G}$ se e somente se uv *não* é uma aresta de G.



- Se v é um vértice de grau n em um grafo G de ordem p então o grau de v em $\bar{G}$ é $p - n - 1$.

1.2 Grau de um vértice

- O complemento $\bar{G}$ de um grafo G é o grafo com $V_{\bar{G}} = V_G$ e tal que uv é uma aresta de $\bar{G}$ se e somente se uv *não* é uma aresta de G.



- Se v é um vértice de grau n em um grafo G de ordem p então o grau de v em $\bar{G}$ é $p - n - 1$.
- Portanto, $\bar{G}$ é regular se e somente se G é regular.

1.2 Grau de um vértice

Exercícios

1. Prove que todo grafo de ordem $p \geqslant 2$ tem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

1.2 Grau de um vértice

Exercícios

1. Prove que todo grafo de ordem $p \geqslant 2$ tem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

2. (a) Construa um grafo r-regular de ordem 8 para cada r, $0 \leqslant r < 8$.

   (b) Determine o complemento de cada grafo construído no item (a).

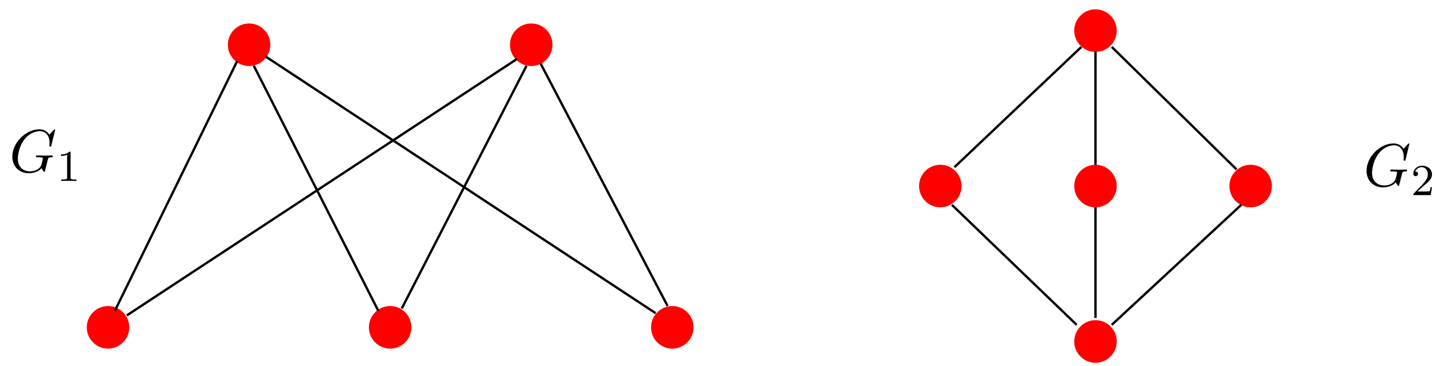
   (c) Prove que Se G é um grafo regular então $\bar{G}$ é regular.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois diagramas que representam o mesmo grafo podem parecer bem diferentes.

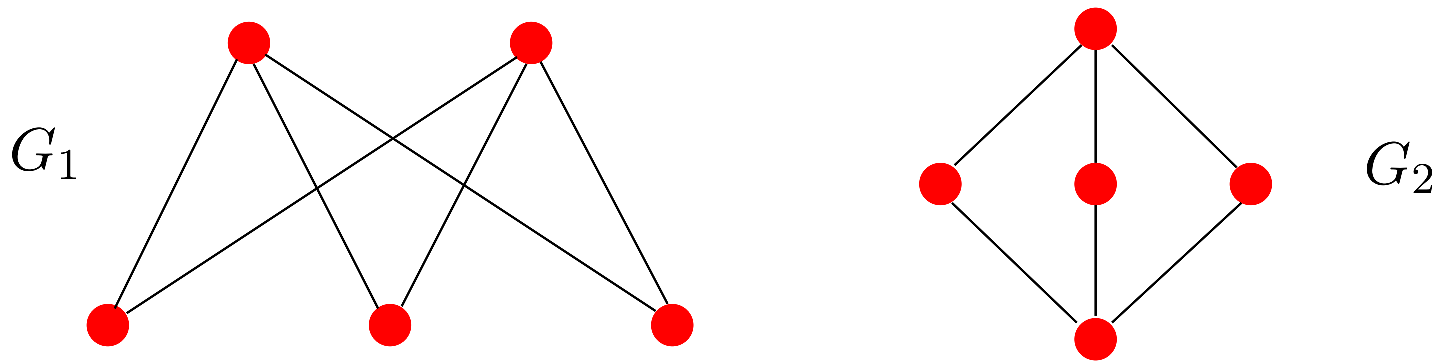
1.3 Grafos isomorfos

- Dois diagramas que representam o mesmo grafo podem parecer bem diferentes.



1.3 Grafos isomorfos

- Dois diagramas que representam o mesmo grafo podem parecer bem diferentes.



- Freqüentemente é importante saber se dois grafos G_1 e G_2 são o mesmo grafo. Intuitivamente, se podemos (re)desenhar um deles e obter o outro, então dizemos que são o mesmo grafo.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos se existe uma função ϕ (um-para-um) de V_{G_1} para V_{G_2} tal que $uv \in E(G_1)$ se e somente se $\phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$. Isto é,

$$\phi\colon V_{G_1} \longrightarrow V_{G_2}$$
$$u \longmapsto \phi(v)$$

para todo vértice $u \in V_{G_1}$ e $v \in V_{G_2}$, tal que

$$uv \in E(G_1) \text{ se e somente se } \phi(u)\phi(v) \in E(G_2).$$

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos se existe uma função ϕ (um-para-um) de V_{G_1} para V_{G_2} tal que $uv \in E(G_1)$ se e somente se $\phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$. Isto é,

$$\phi\colon V_{G_1} \longrightarrow V_{G_2}$$
$$u \longmapsto \phi(v)$$

para todo vértice $u \in V_{G_1}$ e $v \in V_{G_2}$, tal que

$$uv \in E(G_1) \text{ se e somente se } \phi(u)\phi(v) \in E(G_2).$$

- A função ϕ é chamada um isomorfismo.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos se existe uma função ϕ (um-para-um) de V_{G_1} para V_{G_2} tal que $uv \in E(G_1)$ se e somente se $\phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$. Isto é,

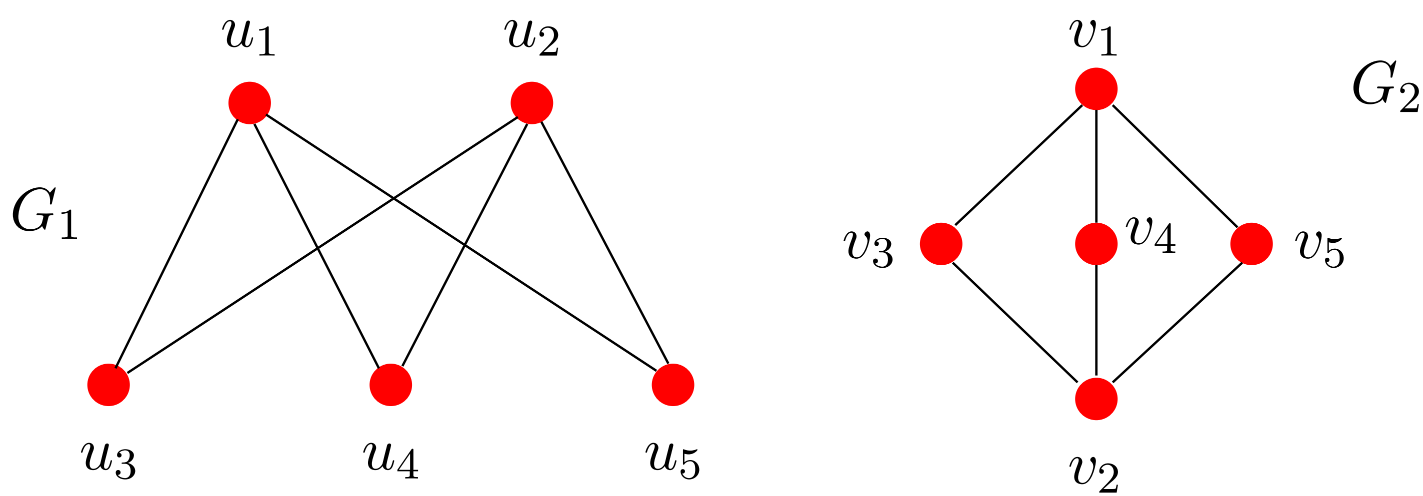
$$\phi \colon V_{G_1} \longrightarrow V_{G_2}$$
$$u \longmapsto \phi(v)$$

para todo vértice $u \in V_{G_1}$ e $v \in V_{G_2}$, tal que

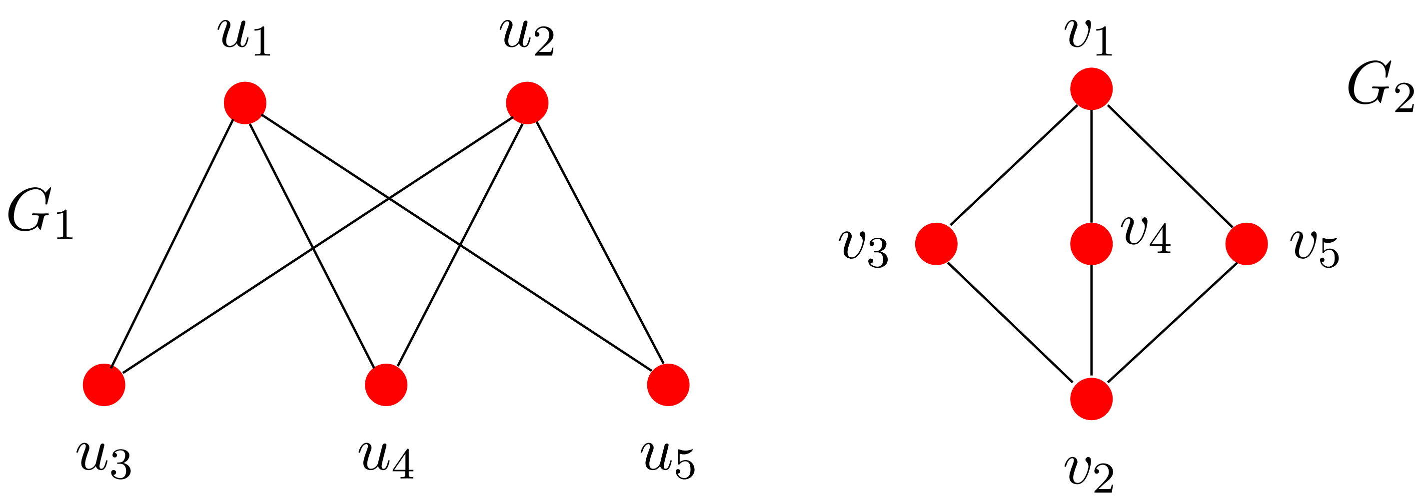
$$uv \in E(G_1) \text{ se e somente se } \phi(u)\phi(v) \in E(G_2).$$

- A função ϕ é chamada um isomorfismo.
- Se G_1 e G_2 são isomorfos então escrevemos $G_1 \cong G_2$.

1.3 Grafos isomorfos



1.3 Grafos isomorfos



- Os grafos G_1 e G_2 são isomorfos já que a função $\phi\colon V_{G_1} \to V_{G_2}$ definida por $\phi(u_i) = v_i$, para todo $i = 1, \ldots, 5$ é um isomorfismo. Dessa forma, o grafo G_2 pode ser redesenhado de modo a obter o grafo G_1 onde v_i e substituído por u_i para todo $i = 1, \ldots, 5$.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos G_1 e G_2 são iguais se $V_{G_1} = V_{G_2}$ e $E_{G_1} = E_{G_2}$.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos G_1 e G_2 são iguais se $V_{G_1} = V_{G_2}$ e $E_{G_1} = E_{G_2}$.
- Grafos que são iguais são certamente isomorfos. Mas o contrário, isto é, grafos isomorfos não são sempre iguais.

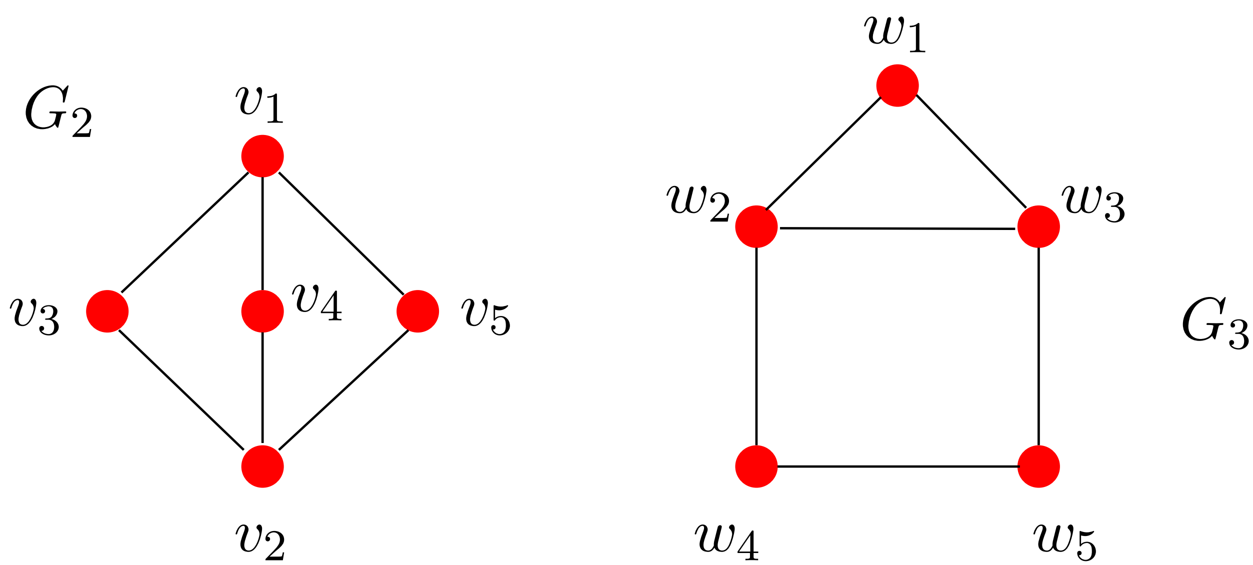
1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos G_1 e G_2 são iguais se $V_{G_1} = V_{G_2}$ e $E_{G_1} = E_{G_2}$.
- Grafos que são iguais são certamente isomorfos. Mas o contrário, isto é, grafos isomorfos não são sempre iguais.
- Se dois grafos são isomorfos então têm a mesma ordem, o mesmo tamanho e os mesmos graus de vértices.

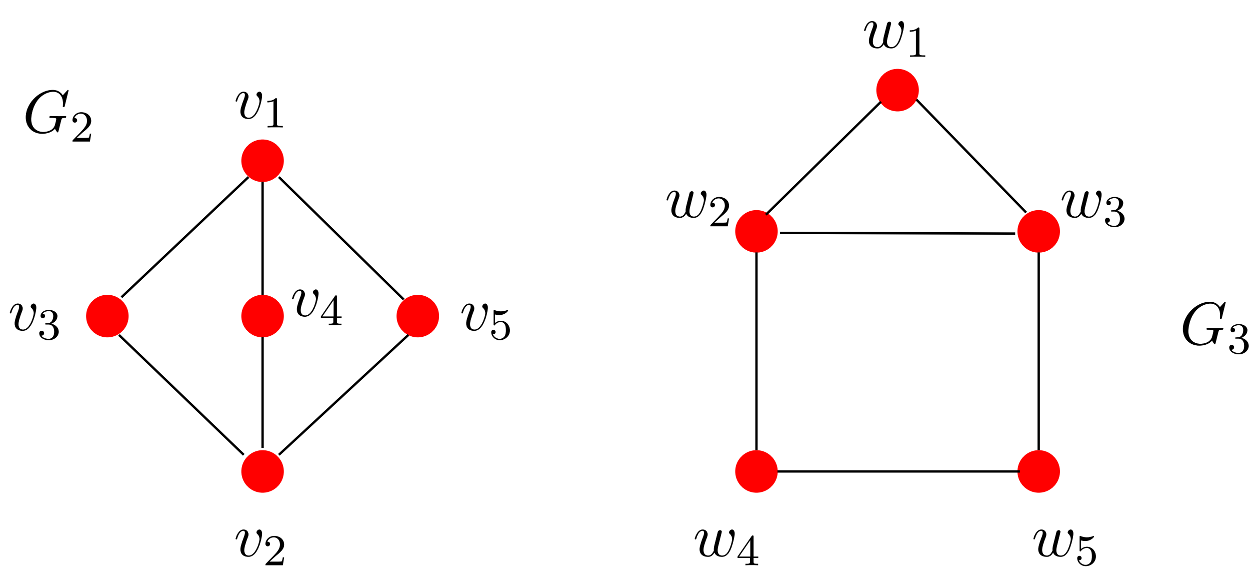
1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos G_1 e G_2 são iguais se $V_{G_1} = V_{G_2}$ e $E_{G_1} = E_{G_2}$.
- Grafos que são iguais são certamente isomorfos. Mas o contrário, isto é, grafos isomorfos não são sempre iguais.
- Se dois grafos são isomorfos então têm a mesma ordem, o mesmo tamanho e os mesmos graus de vértices.
- Essas propriedades, no entanto, não são suficientes.

1.3 Grafos isomorfos

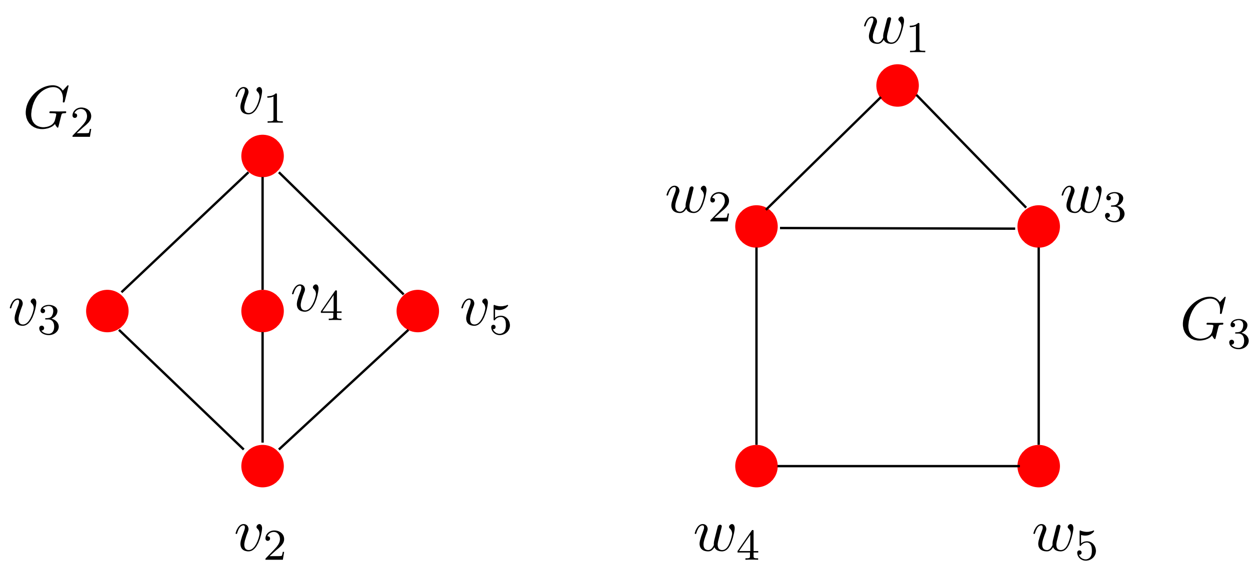


1.3 Grafos isomorfos



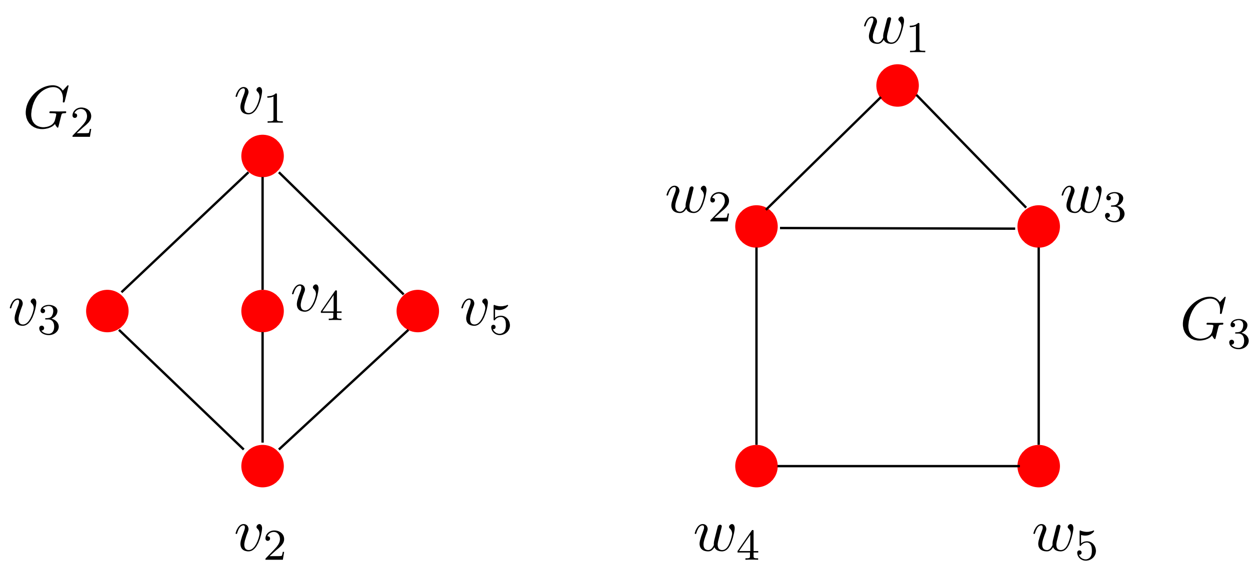
- Os grafos G_2 e G_3 têm ordem 5, tamanho 6 e graus 3, 3, 2, 2, 2, mas $G_2 \not\cong G_3$.

1.3 Grafos isomorfos

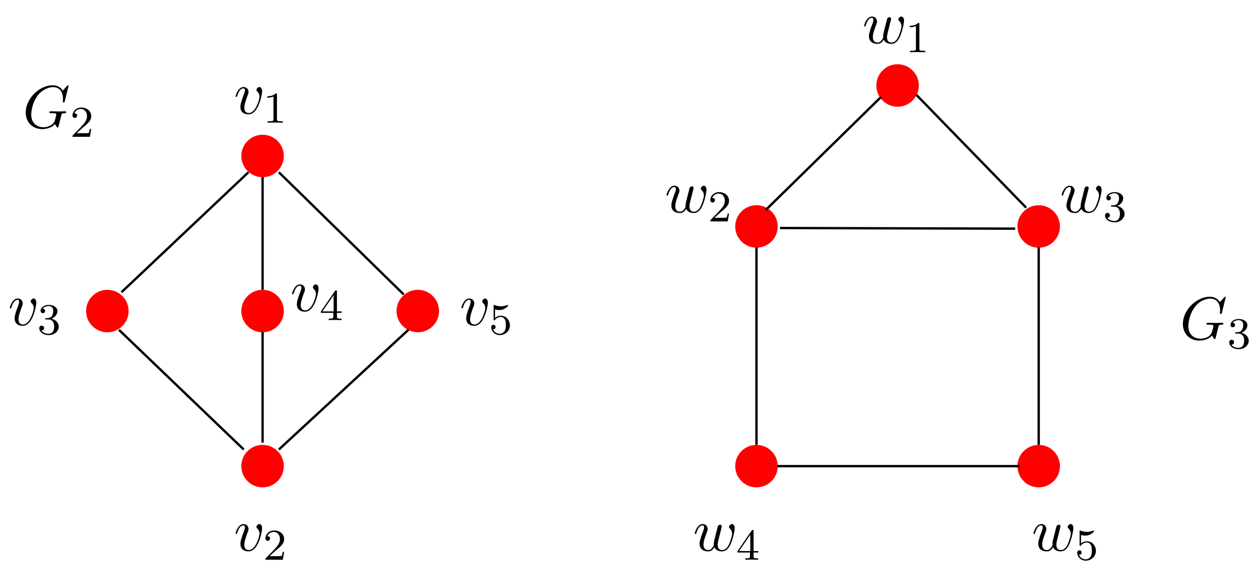


- Os grafos G_2 e G_3 têm ordem 5, tamanho 6 e graus 3, 3, 2, 2, 2, mas $G_2 \not\cong G_3$.
- Uma forma de mostrar que G_2 e G_3 não são isomorfos é mostrar que *nenhuma* função um-para-um ϕ de V_{G_2} para V_{G_3} pode ser um isomorfismo.

1.3 Grafos isomorfos



1.3 Grafos isomorfos



- Para uma tal função ϕ, devem existir três vértices de G_2 que têm w_1, w_2 e w_3 como seus vértices imagens. Note que esses vértices são adjacentes dois a dois em G_3. Dessa forma, os vértices correspondentes por ϕ em G_2 devem ter a mesma propriedade. Entretanto, G_2 não tem vértices com essas características e por isso $G_2 \not\cong G_3$.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos são considerados o mesmo grafo se e somente se são isomorfos.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos são considerados o mesmo grafo se e somente se são isomorfos.
- Existe um único grafo de ordem 1, que chamamos de grafo trivial. Um grafo não trivial tem ordem pelo menos 2.

1.3 Grafos isomorfos

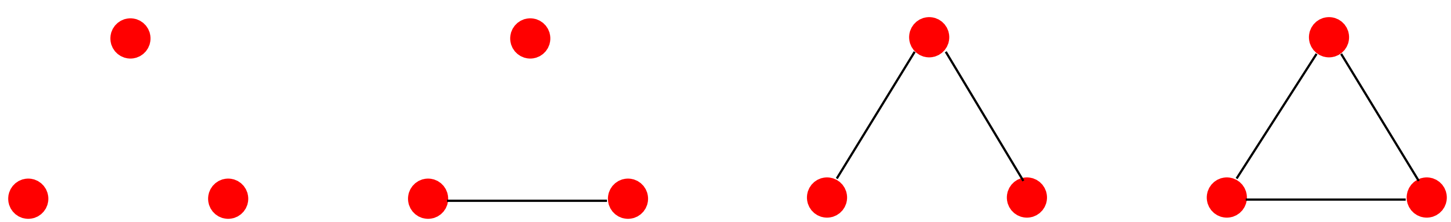
- Dois grafos são considerados o mesmo grafo se e somente se são isomorfos.
- Existe um único grafo de ordem 1, que chamamos de grafo trivial. Um grafo não trivial tem ordem pelo menos 2.
- Existem dois grafos (não isomorfos) de ordem 2 e quatro grafos de ordem 3.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos são considerados o mesmo grafo se e somente se são isomorfos.
- Existe um único grafo de ordem 1, que chamamos de grafo trivial. Um grafo não trivial tem ordem pelo menos 2.
- Existem dois grafos (não isomorfos) de ordem 2 e quatro grafos de ordem 3.

1.3 Grafos isomorfos

- Dois grafos são considerados o mesmo grafo se e somente se são isomorfos.
- Existe um único grafo de ordem 1, que chamamos de grafo trivial. Um grafo não trivial tem ordem pelo menos 2.
- Existem dois grafos (não isomorfos) de ordem 2 e quatro grafos de ordem 3.



1.3 Grafos isomorfos

Exercícios

1. Encontre dois grafos não isomorfos 3-regulares de ordem 6 e tamanho 9.

1.3 Grafos isomorfos

Exercícios

1. Encontre dois grafos não isomorfos 3-regulares de ordem 6 e tamanho 9.
2. Desenhe todos os grafos não isomorfos de ordem 4.

1.3 Grafos isomorfos

Exercícios

1. Encontre dois grafos não isomorfos 3-regulares de ordem 6 e tamanho 9.
2. Desenhe todos os grafos não isomorfos de ordem 4.
3. Dê um exemplo de um grafo G de ordem 5 tal que $G \cong \bar{G}$.