

Introdução à Teoria dos Grafos

2005

Fábio Henrique Viduani Martinez

fhvm@dct.ufms.br

DCT–CCET–UFMS

Informações gerais

- Objetivos: estudar problemas combinatórios através de suas modelagens em termos de estruturas discretas, chamadas **grafos**

Informações gerais

- Objetivos: estudar problemas combinatórios através de suas modelagens em termos de estruturas discretas, chamadas **grafos**
- Avaliação: 2 provas, 8 listas de exercícios e 2 implementações

$$MF = \frac{8 \times MP + 2 \times ML + MI}{10}$$

Informações gerais

- Objetivos: estudar problemas combinatórios através de suas modelagens em termos de estruturas discretas, chamadas **grafos**
- Avaliação: 2 provas, 8 listas de exercícios e 2 implementações

$$MF = \frac{8 \times MP + 2 \times ML + MI}{10}$$

- Livro-texto:
Applied and Algorithmic Graph Theory, Gary Chartrand and Ortrud R. Oellermann, McGraw-Hill, 1993

Informações gerais

- Objetivos: estudar problemas combinatórios através de suas modelagens em termos de estruturas discretas, chamadas **grafos**
- Avaliação: 2 provas, 8 listas de exercícios e 2 implementações

$$MF = \frac{8 \times MP + 2 \times ML + MI}{10}$$

- Livro-texto:
Applied and Algorithmic Graph Theory, Gary Chartrand and Ortrud R. Oellermann, McGraw-Hill, 1993
- <http://www.dct.ufms.br/~fhvm/disciplinas/2005/grafos/index.html>

Programação das aulas

1. Introdução

Programação das aulas

1. Introdução

1.1 O que é um grafo?

Programação das aulas

1. Introdução

1.1 O que é um grafo?

1.2 Grau de um vértice

Programação das aulas

1. Introdução

1.1 O que é um grafo?

1.2 Grau de um vértice

1.3 Isomorfismo

Programação das aulas

1. Introdução

- 1.1 O que é um grafo?
- 1.2 Grau de um vértice
- 1.3 Isomorfismo
- 1.4 Subgrafos

Programação das aulas

1. Introdução

- 1.1 O que é um grafo?
- 1.2 Grau de um vértice
- 1.3 Isomorfismo
- 1.4 Subgrafos
- 1.5 Grafos conexos

Programação das aulas

1. Introdução

1.1 O que é um grafo?

1.2 Grau de um vértice

1.3 Isomorfismo

1.4 Subgrafos

1.5 Grafos conexos

1.6 Vértices e arestas de corte

Programação das aulas

1. Introdução

- 1.1 O que é um grafo?
- 1.2 Grau de um vértice
- 1.3 Isomorfismo
- 1.4 Subgrafos
- 1.5 Grafos conexos
- 1.6 Vértices e arestas de corte
- 1.7 Grafos especiais

Programação das aulas

1. Introdução

- 1.1 O que é um grafo?
- 1.2 Grau de um vértice
- 1.3 Isomorfismo
- 1.4 Subgrafos
- 1.5 Grafos conexos
- 1.6 Vértices e arestas de corte
- 1.7 Grafos especiais
- 1.8 Grafos orientados

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
 - 2.1 Propriedades

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
 - 2.1 Propriedades
 - 2.2 Árvores com raiz

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
 - 2.1 Propriedades
 - 2.2 Árvores com raiz
 - 2.3 Busca em profundidade

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
 - 2.1 Propriedades
 - 2.2 Árvores com raiz
 - 2.3 Busca em profundidade
 - 2.4 Busca em largura

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
 - 2.1 Propriedades
 - 2.2 Árvores com raiz
 - 2.3 Busca em profundidade
 - 2.4 Busca em largura
 - 2.5 Problema da árvore geradora de custo mínimo

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
 - 3.1 Distância em grafos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
 - 3.1 Distância em grafos
 - 3.2 Distância em grafos com custos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
 - 3.1 Distância em grafos
 - 3.2 Distância em grafos com custos
 - 3.3 Centro e mediana de um grafo

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
 - 4.1 Introdução aos emparelhamentos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
 - 4.1 Introdução aos emparelhamentos
 - 4.2 Emparelhamentos máximos em grafos bipartidos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
 - 4.1 Introdução aos emparelhamentos
 - 4.2 Emparelhamentos máximos em grafos bipartidos
 - 4.3 Emparelhamentos máximos em grafos gerais

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
 - 4.1 Introdução aos emparelhamentos
 - 4.2 Emparelhamentos máximos em grafos bipartidos
 - 4.3 Emparelhamentos máximos em grafos gerais
 - 4.4 Fatorizações

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
 - 4.1 Introdução aos emparelhamentos
 - 4.2 Emparelhamentos máximos em grafos bipartidos
 - 4.3 Emparelhamentos máximos em grafos gerais
 - 4.4 Fatorizações
 - 4.5 Projeto de blocos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
 - 5.1 Introdução

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
 - 5.1 Introdução
 - 5.2 Caracterização

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
 - 5.1 Introdução
 - 5.2 Caracterização
 - 5.3 Problema do carteiro chinês

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
 - 6.1 Introdução

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
 - 6.1 Introdução
 - 6.2 Quais grafos são hamiltonianos?

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
 - 6.1 Introdução
 - 6.2 Quais grafos são hamiltonianos?
 - 6.3 Problema do caixeiro viajante

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
 - 7.1 Coloração de vértices

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
 - 7.1 Coloração de vértices
 - 7.2 Coloração de arestas

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
 - 7.1 Coloração de vértices
 - 7.2 Coloração de arestas
 - 7.3 Problema das quatro cores

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
8. Redes

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
8. Redes
- 8.1 Introdução

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
8. Redes
 - 8.1 Introdução
 - 8.2 Teorema do fluxo máximo, corte mínimo

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
8. Redes
 - 8.1 Introdução
 - 8.2 Teorema do fluxo máximo, corte mínimo
 - 8.3 Algoritmo do fluxo máximo, corte mínimo

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
8. Redes
 - 8.1 Introdução
 - 8.2 Teorema do fluxo máximo, corte mínimo
 - 8.3 Algoritmo do fluxo máximo, corte mínimo
 - 8.4 Conexidade e aresta-conexidade

Programação das aulas

1. Introdução
2. Árvores
3. Caminhos e distância em grafos
4. Emparelhamentos e fatorização
5. Grafos eulerianos
6. Grafos hamiltonianos
7. Coloração
8. Redes
 - 8.1 Introdução
 - 8.2 Teorema do fluxo máximo, corte mínimo
 - 8.3 Algoritmo do fluxo máximo, corte mínimo
 - 8.4 Conexidade e aresta-conexidade
 - 8.5 Teorema de Menger

1. Introdução

- O ínicio da teoria dos grafos é considerado ser em 1736 com a publicação da solução de Leonard Euler do problema das pontes de Königsberg.

1. Introdução

- O ínicio da teoria dos grafos é considerado ser em 1736 com a publicação da solução de Leonard Euler do problema das pontes de Königsberg.
- Dénes König escreveu o primeiro livro de teoria dos grafos em 1936.

1. Introdução

- O ínicio da teoria dos grafos é considerado ser em 1736 com a publicação da solução de Leonard Euler do problema das pontes de Königsberg.
- Dénes König escreveu o primeiro livro de teoria dos grafos em 1936.
- Oystein Ore escreveu o primeiro livro de teoria dos grafos em língua inglesa em 1967.

1. Introdução

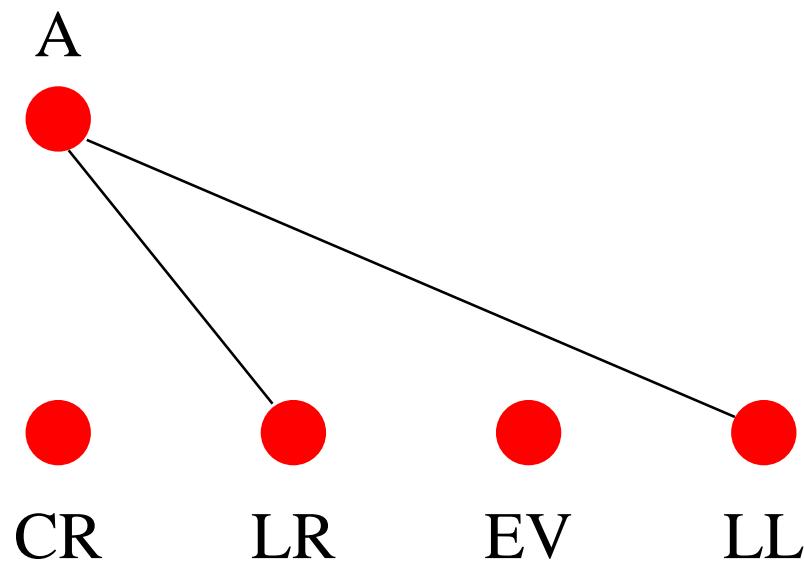
O que é um grafo? Por que estamos interessados neles?

1. Introdução

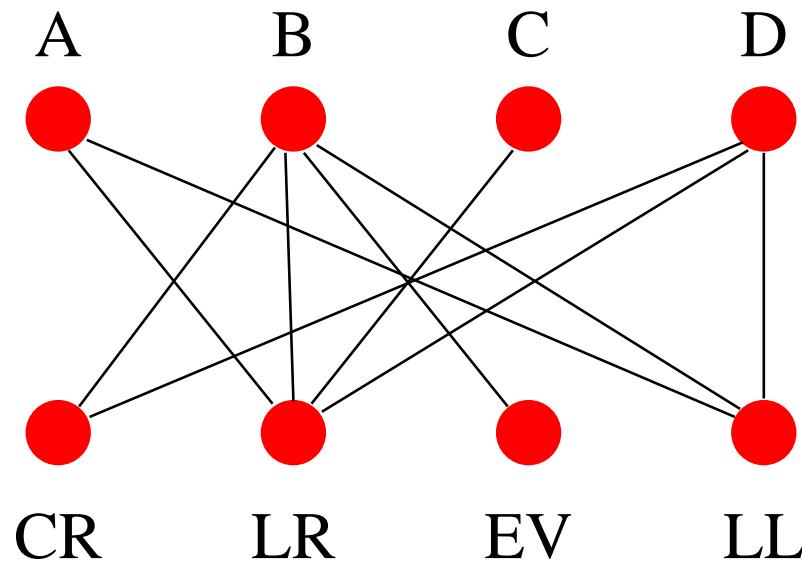
O que é um grafo? Por que estamos interessados neles?

- Exemplo 1: quatro estudantes de graduação – Alex, Bete, Carlos e Diana – fizeram seu primeiro ano e precisaram trabalhar nas férias. Eles souberam de quatro possíveis empregos na cidade: trabalhar em um restaurante de comida rápida, trabalhar como vendedor(a) de uma loja de roupas, como atendente de uma empresa de viagens ou como vendedor(a) em uma loja de livros.

1. Introdução

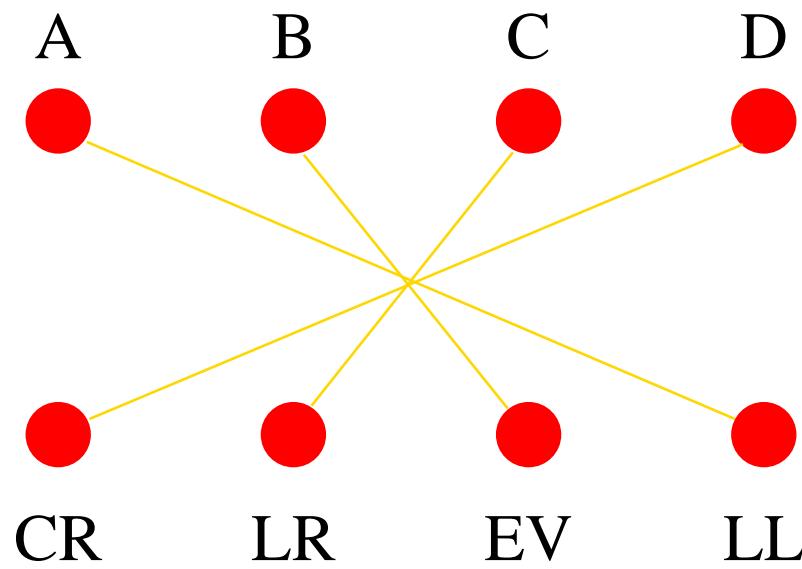


1. Introdução



Os quatro estudantes podem encontrar trabalhos que eles gostam?

1. Introdução



Emparelhamentos

1. Introdução

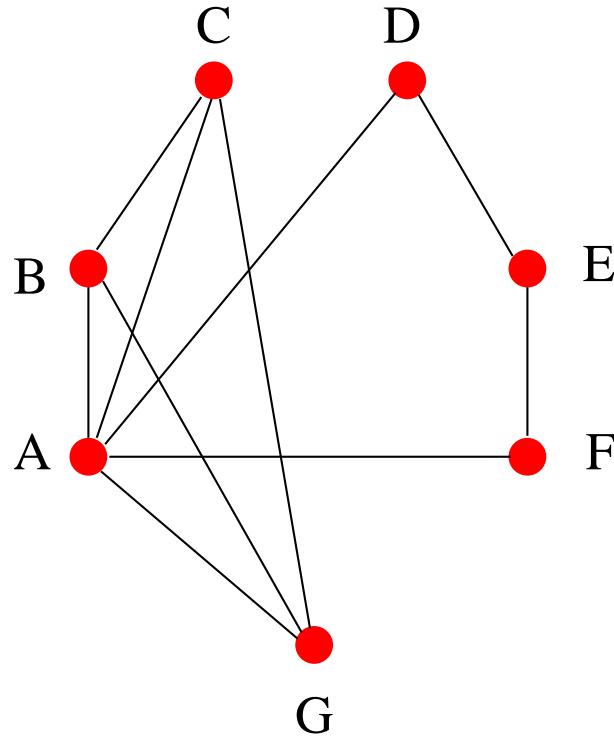
O que é um grafo? Por que estamos interessados neles?

1. Introdução

O que é um grafo? Por que estamos interessados neles?

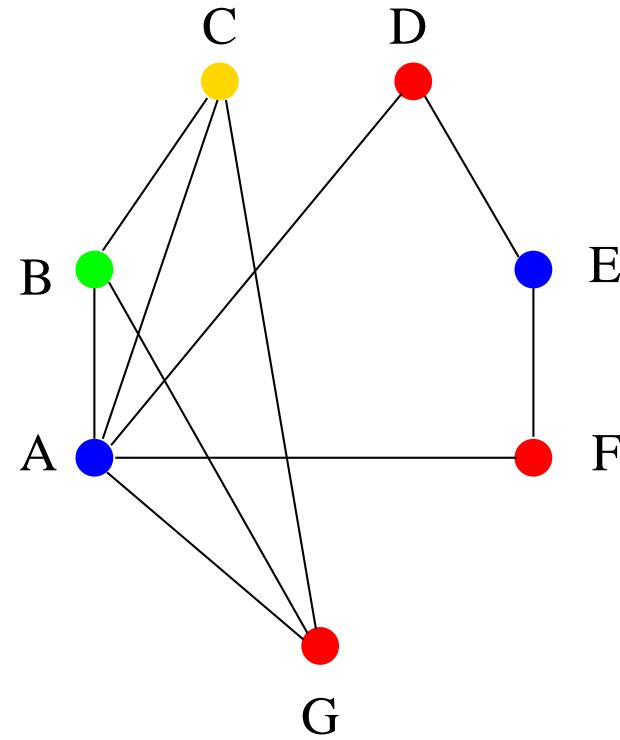
- Exemplo 2 : um químico deseja transportar os produtos químicos A, B, C, D, E, F e G usando a menor quantidade possível de recipientes. Certos produtos não podem ser colocados em um mesmo recipiente já que reagem um com o outro. Em particular, quaisquer dois dos produtos A, B, C e G reagem um com o outro. Além disso, A e E reagem com D e F.

1. Introdução



Qual o menor número de recipientes necessários para acondicionar os produtos químicos?

1. Introdução



Coloração

1.1 O que é um grafo?

- Um **grafo** G é um conjunto finito e não vazio V_G de objetos chamados **vértices** (ou **nós** ou **pontos**) e um conjunto (possivelmente vazio) E_G de subconjuntos de dois elementos de V_G chamados **arestas** (ou **linhas**).

1.1 O que é um grafo?

- Um **grafo** G é um conjunto finito e não vazio V_G de objetos chamados **vértices** (ou **nós** ou **pontos**) e um conjunto (possivelmente vazio) E_G de subconjuntos de dois elementos de V_G chamados **arestas** (ou **linhas**).
- Seja G um grafo e $\{u, v\}$ uma aresta de G . Como $\{u, v\}$ é um conjunto de dois elementos, podemos escrever também $\{v, u\}$. Em geral, representamos uma aresta por uv ou vu ao invés de $\{u, v\}$ ou $\{v, u\}$.

1.1 O que é um grafo?

- Um **grafo** G é um conjunto finito e não vazio V_G de objetos chamados **vértices** (ou **nós** ou **pontos**) e um conjunto (possivelmente vazio) E_G de subconjuntos de dois elementos de V_G chamados **arestas** (ou **linhas**).
- Seja G um grafo e $\{u, v\}$ uma aresta de G . Como $\{u, v\}$ é um conjunto de dois elementos, podemos escrever também $\{v, u\}$. Em geral, representamos uma aresta por uv ou vu ao invés de $\{u, v\}$ ou $\{v, u\}$.
- Se $e = uv$ é uma aresta de um grafo G então dizemos que u e v são **adjacentes** em G e que e **liga** u e v .

1.1 O que é um grafo?

- Exemplo: um grafo G pode ser definido pelos conjuntos

$$V_G = \{u, v, w, x, y, z\}$$

e

$$E_G = \{uv, uw, wx, xy, xz\}.$$

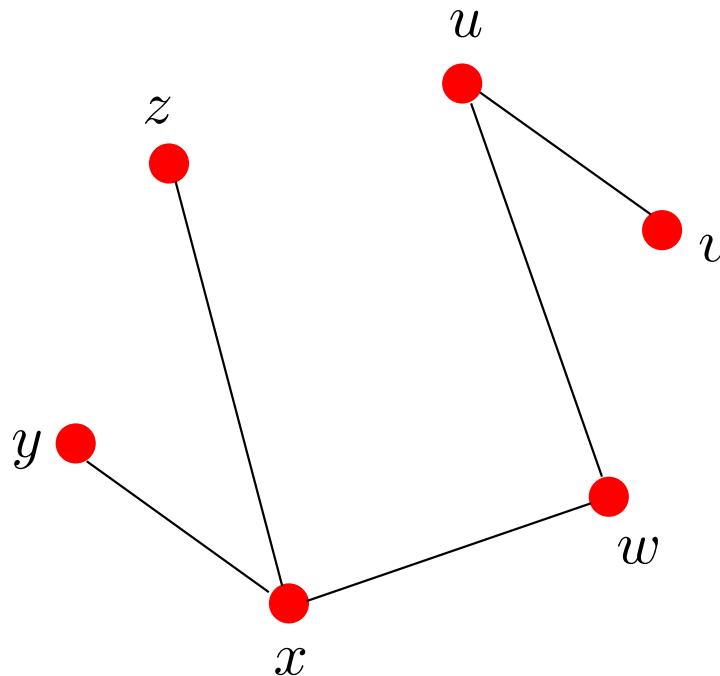
1.1 O que é um grafo?

- Exemplo: um grafo G pode ser definido pelos conjuntos

$$V_G = \{u, v, w, x, y, z\}$$

e

$$E_G = \{uv, uw, wx, xy, xz\}.$$

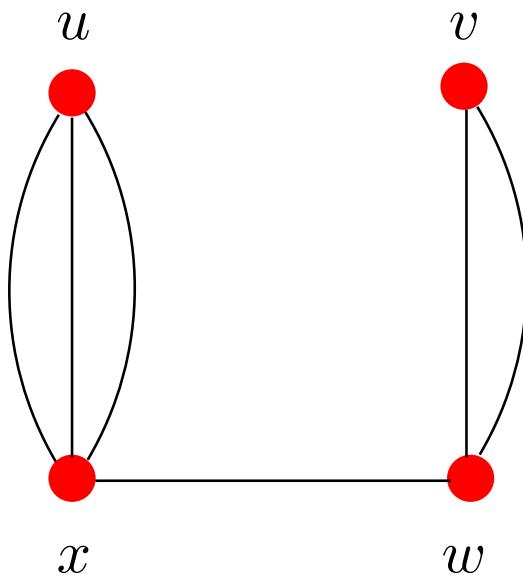


1.1 O que é um grafo?

- Se permitimos que mais de uma aresta conecte um par de vértices em um grafo, temos então um **multigrafo**. Duas ou mais arestas que ligam o mesmo par de vértices são chamadas de **arestas paralelas**.

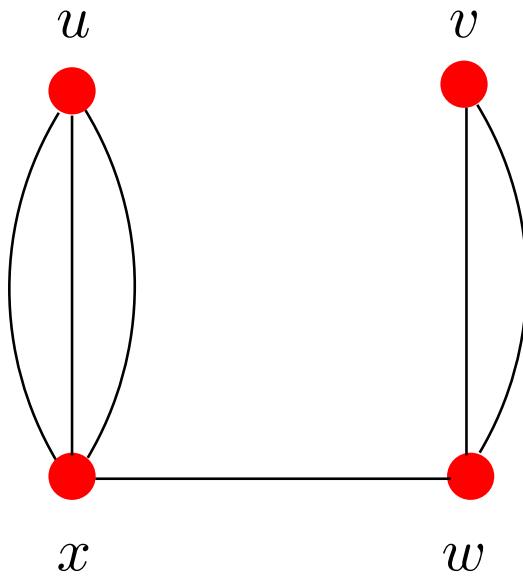
1.1 O que é um grafo?

- Se permitimos que mais de uma aresta conecte um par de vértices em um grafo, temos então um **multigrafo**. Duas ou mais arestas que ligam o mesmo par de vértices são chamadas de **arestas paralelas**.



1.1 O que é um grafo?

- Se permitimos que mais de uma aresta conecte um par de vértices em um grafo, temos então um **multigrafo**. Duas ou mais arestas que ligam o mesmo par de vértices são chamadas de **arestas paralelas**.



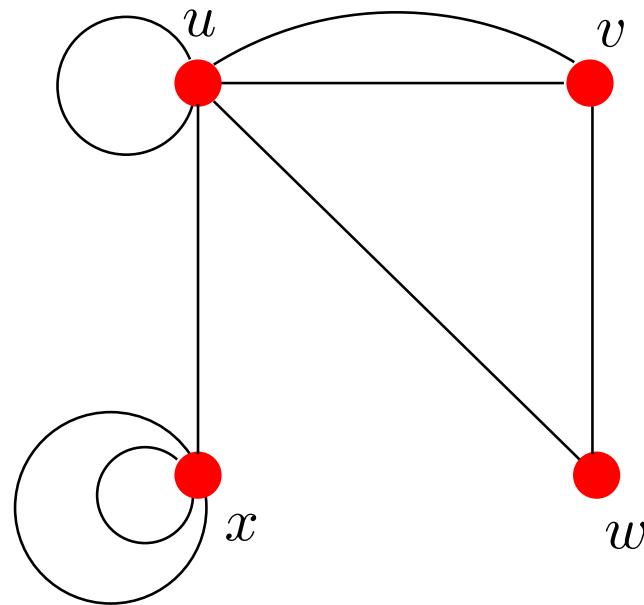
- Obviamente, todo grafo é um multigrafo, mas nem todo multigrafo é um grafo.

1.1 O que é um grafo?

- Uma aresta cujas pontas conecta o mesmo vértice é chamada um **laço**. Se permitimos arestas paralelas e laços ligando vértices, então temos um **pseudografo**.

1.1 O que é um grafo?

- Uma aresta cujas pontas conecta o mesmo vértice é chamada um **laço**. Se permitimos arestas paralelas e laços ligando vértices, então temos um **pseudografo**.

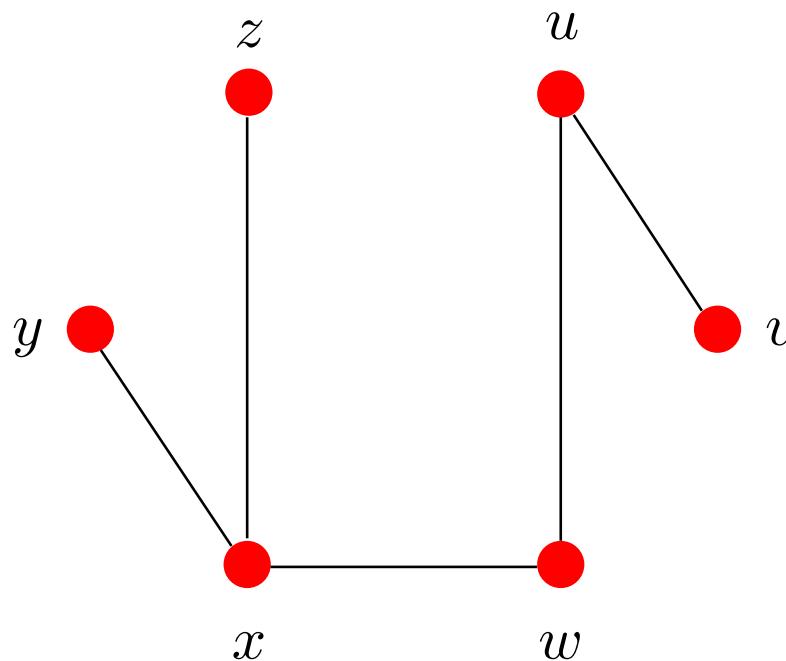


1.1 O que é um grafo?

- O número de vértices em um grafo G é chamado sua **ordem** e o número de arestas seu **tamanho**. Ou seja, a ordem de G é $|V_G|$ e o tamanho é $|E_G|$. Em geral, usamos p ou p_G para denotar a ordem de G e q ou q_G para denotar o tamanho de G . Um grafo de ordem p e tamanho q é chamado um **(p, q) -grafo**.

1.1 O que é um grafo?

- O número de vértices em um grafo G é chamado sua **ordem** e o número de arestas seu **tamanho**. Ou seja, a ordem de G é $|V_G|$ e o tamanho é $|E_G|$. Em geral, usamos p ou p_G para denotar a ordem de G e q ou q_G para denotar o tamanho de G . Um grafo de ordem p e tamanho q é chamado um **(p, q) -grafo**.



1.1 O que é um grafo?

Proposição 1.1 Se G é um (p, q) -grafo, então $q \leq \binom{p}{2}$.

1.1 O que é um grafo?

Proposição 1.1 Se G é um (p, q) -grafo, então $q \leq \binom{p}{2}$.

Prova. Indução em p .