Algoritmos e Estruturas de Dados II
Lista de Exercícios de Recursão

Bacharelado em Análise de Sistemas, DCT–UFMS, 9/3/2005

1. Dado um inteiro não negativo n, descreva um procedimento recursivo para computar n^2.

2. A multiplicação de dois inteiros não negativos pode ser definida recursivamente da seguinte forma:
$$\begin{cases} a \times b = a, & \text{se } b = 1, \\ a \times b = a \times (b-1) + a, & \text{se } b > 1. \end{cases}$$
Descreva um procedimento recusrivo que computa a multiplicação de dois inteiros não negativos de acordo com a fórmula acima.

3. Seja A um vetor de inteiros. Escreva algoritmos recursivos para computar:
   (a) o elemento máximo do vetor;
   (b) o elemento mínimo do vetor;
   (c) a soma dos elementos do vetor;
   (d) o produto dos elementos do vetor;
   (e) a média dos elementos do vetor.

4. A função de Ackerman é definida recursivamente sobre inteiros não negativos da seguinte forma:
$$\begin{cases} a(m,n) = n+1, & \text{se } m = 0, \\ a(m,n) = a(m-1,1), & \text{se } m \neq 0, n = 0, \\ a(m,n) = a(m-1, a(m, n-1)), & \text{se } m \neq 0, n \neq 0. \end{cases}$$
   (a) Usando a definição acima, mostre que $a(2,2)$ é 7;
   (b) Escreva um procedimento iterativo para computar $a(m,n)$;
   (c) Escreva um procedimento recursivo para computar $a(m,n)$.

5. Represente por $\mathsf{comitê}(n,k)$ o número de comitês de k pessoas que podem ser formados a partir de n pessoas, supondo $n \geqslant k$. Por exemplo, $\mathsf{comitê}(4,3) = 4$ já que dadas 4 pessoas A, B, C e D, existem quatro possíveis comitês de quatro pessoas: ABC, ABD, ACD e BCD. A fórmula para computar $\mathsf{comitê}(n,k)$ é dada a seguir:
$$\mathsf{comitê}(n,k) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = k \text{ ou } k = 0, \\ \mathsf{comitê}(n-1,k) + \mathsf{comitê}(n-1,k-1), & \text{se } n \neq k. \end{cases}$$
Verifique que essa fórmula está correta. Escreva um procedimento recursivo para computar $\mathsf{comitê}(n,k)$ para $n, k \geqslant 1$.

6. Uma **matriz de ordem** n é uma matriz $n \times n$ de números. Por exemplo,

$$[3]\,,$$

é uma matriz de ordem 1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix},$$

é uma matriz de ordem 2 e

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -5 & 0 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz de ordem 4.

Defina o ***minor*** de um elemento x em uma matriz como a submatriz formada pela remoção da linha e da coluna que contêm x. No exemplo anterior da matriz 4×4, o *minor* do elemento 7 é a matriz 3×3 a seguir

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

Claramente, a ordem de um *minor* de qualquer elemento é 1 menos a ordem da matriz original. Denote o *minor* de um elemento $A[i,j]$ da matriz A por $minor(A[i,j])$.

Defina o **determinante** de uma matriz A, denotado por $det(A)$, recursivamente como segue:

(a) Se A é uma matriz de ordem 1, então $det(A) = A[1,1]$;

(b) Se A tem ordem maior que 1, compute o determinante de A como segue.
Escolha uma linha i ou uma coluna j de A. Então,

$$det(A) = \sum_i -1^{(i+j)} \times A[i,j] \times det(minor(A[i,j])), \qquad \text{para qualquer } j,$$

ou

$$det(A) = \sum_j -1^{(i+j)} \times A[i,j] \times det(minor(A[i,j])), \qquad \text{para qualquer } i.$$

Escreva um procedimento recursivo que recebe uma matriz A de ordem n e devolve o valor de $det(A)$.