Fundamentos da Teoria da Computação
Lista Alfabetos e Linguagens

Bacharelado em Ciência da Computação, DCT–UFMS, 10/8/2004

1. (a) Prove, usando a definição de concatenação, que a concatenação de palavras é associativa.
   (b) Dê uma definição indutiva da concatenação de palavras.
   (c) Usando a definição indutiva dada em (b), prove que a concatenação de palavras é associativa.

2. Prove cada uma das seguintes afirmações, usando a definição indutiva do reverso de uma palavra.
   (a) $(w^R)^R = w$, para toda palavra w.
   (b) Se v é uma subpalavra de w então v^R é uma subpalavra de w^R.
   (c) $(w^i)^R = (w^R)^i$, para toda palavra w e $i \geqslant 0$.

3. Seja $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_{26}\}$ o alfabeto romano. Defina cuidadosamente a relação binária $<$ sobre Σ^* de tal forma que $x < y$ se e somente se x precede y em um dicionário alfabético da língua portuguesa.

4. Mostre que:
   (a) $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$.
   (b) Se a e b são símbolos distintos, então $\{a, b\}^* = \{a\}^*(\{b\}\{a\}^*)^*$.
   (c) Se Σ é um alfabeto qualquer, $\varepsilon \in L_1 \subseteq \Sigma^*$ e $\varepsilon \in L_2 \subseteq \Sigma^*$, então $(L_1\Sigma^*L_2)^* = \Sigma^*$.
   (d) Para qualquer linguagem L, $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$.

5. Dê alguns exemplos de palavras que estão, e que não estão, nos conjuntos a seguir, onde $\Sigma = \{a, b\}$.
   (a) $\{w \colon w = uu^Ru, \text{ para alguma palavra } u \in \Sigma\Sigma\}$.
   (b) $\{w \colon ww = www\}$.
   (c) $\{w \colon uvw = wvu, \text{ para algum par } u, v \in \Sigma^*\}$.
   (d) $\{w \colon www = uu, \text{ para alguma palavra } u \in \Sigma^*\}$.

6. Reescreva cada uma das expressões regulares a seguir como uma expressão mais simples que representa o mesmo conjunto.

(a) $\emptyset^* \cup a^* \cup b^*(a \cup b)^*$

(b) $((a^*b^*)^* \cup (b^*a^*)^*)^*$

(c) $(a^*b)^* \cup (b^*a)^*$

(d) $(a \cup b)^*a(a \cup b)^*$

7. Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Escreva expresões regulares para os seguintes conjuntos.

   (a) Todas as palavras em Σ^* com não mais que três a's.

   (b) Todas as palavras em Σ^* com um número de a's divisível por três.

   (c) Todas as palavras em Σ^* com exatamente uma ocorrência da subpalavra aaa.

8. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Explique.

   (a) $baa \in a^*b^*a^*b^*$

   (b) $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b$

   (c) $a^*b^* \cap b^*c^* = \emptyset$

   (d) $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

9. A **altura-estrela** $h(\alpha)$ de uma expressão regular α é definida por indução da seguinte forma.

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= 0, \\ h(a) &= 0, \text{ para cada } a \in \Sigma, \\ h(\alpha \cup \beta) = h(\alpha\beta) &= \max\{h(\alpha), h(\beta)\}, \\ h(\alpha^*) &= h(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

   Por exemplo, se $\alpha = (((ab)^* \cup b^*)^* \cup a^*)$, então $h(\alpha) = 2$. Encontre, em cada caso, uma expressão regular que representa a mesma linguagem e tem altura-estrela mínima.

   (a) $((abc)^*ab)^*$

   (b) $(a(ab^*c)^*)^*$

   (c) $(c(a^*b)^*)^*$

   (d) $(a^* \cup b^* \cup ab)^*$

   (e) $(abb^*a)^*$