Complexidade de Algoritmos I

Prof. Pedro J. de Rezende

2o. Semestre de 2002

Provas por Indução*

1 Introdução

A técnica de demonstrações por indução tem especial interesse em computação pois possui a característica de ser construtiva, evidenciando os passos necessários para se obter o objeto tese do teorema. Além de útil para se provarem teoremas, o princípio da indução finita também pode ser utilizado para formular *procedimentos recursivos* e *indutivos*. A partir destes, podem-se deduzir mais facilmente algoritmos cujas provas de corretude são essencialmente as provas por indução que lhes deram origem. Em oposição à característica construtiva desta técnica, há métodos de demonstrações existenciais (que são não-construtivas) fruto do trabalho de axiomatização de Hilbert que tanto contribuiu para enriquecer o rigor da matemática no final do século XIX, embora isso tenha se dado ao custo da construtividade que herdamos de Euclides.

Para melhor compreender a prova por indução pode ser utilizada a metáfora do dominó: para derrubar todas as peças de uma seqüência de pedras de dominó enfileiradas basta se verificar que

1. é possível se aplicar força suficiente para derrubar a primeira peça (base da indução);
2. assumindo-se que uma dada peça P qualquer cairá (hipótese da indução);
3. a distância entre a peça P e sua consecutiva é menor que a altura de P.

A Figura 1 traz a ilustração desta metáfora. Uma definição mais formal:[2]

Princípio da indução finita 1 (Fraca)
Sejam P_n afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas associadas a cada inteiro positivo $n \geq k$. Se "P_k é verdadeiro", e para cada inteiro positivo j maior ou igual a k, "se P_j é verdadeiro, então P_{j+1} também o é", então "P_n é verdadeiro" para todos inteiros $n \geq k$.

Formalmente, das duas afirmações:

$$P_k \text{ é verdadeiro para algum } k \geq 1 \tag{1.1}$$

$$\text{se } P_j \text{ é verdadeiro, então } P_{j+1} \text{ é verdadeiro, } j \geq k \tag{1.2}$$

deriva-se:

$$P_n \text{ é verdadeiro, para todo } n \geq k \tag{1.3}$$

*Escriba: João Porto de Albuquerque Pereira.

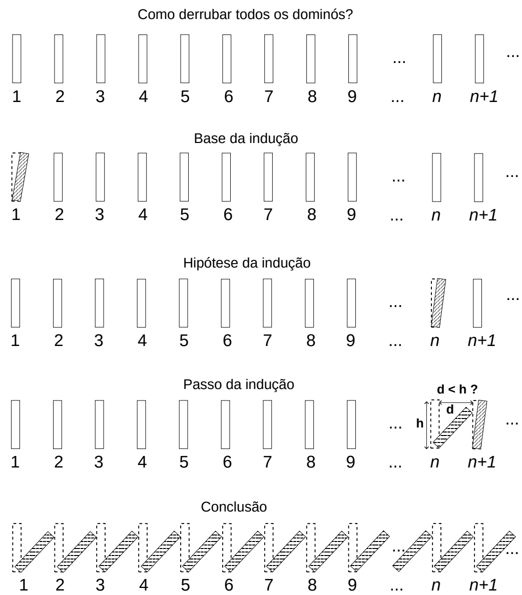

Figura 1: Princípio da Indução Fraca

A afirmação (1.1) é denominada *base*; a afirmação (1.2), *passo indutivo*; e a afirmação "P_j é verdadeiro", é denominada *hipótese de indução.*

Esta formulação é denominada *princípio da indução (finita) fraca*, porque apenas P_j é assumido como verdadeiro para se provar a veracidade de P_{j+1}.

Princípio da indução finita 2 (Forte)
Em alguns problemas, contudo, para se provar que P_{j+1} é verdadeiro, podemos ter que assumir a veracidade de todos P_i, para $k \leq i \leq j$. Esta forma estendida é denominada princípio da indução forte*, e sua formulação é a que se segue.*

Sejam P_n afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas associadas a cada inteiro positivo $n \geq k$. Se "P_k é verdadeiro", e para cada inteiro positivo j maior ou igual a k, "se $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j$ são verdadeiros, então P_{j+1} também o é", então "P_n é verdadeiro" para todos inteiros $n \geq k$.

Das afirmações:

$$P_k \textit{ é verdadeiro para algum } k \geq 1$$

$$\textit{se } P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j \textit{ é verdadeiro, então } P_{j+1} \text{ é verdadeiro, } j \geq k$$

deriva-se:

$$P_n \textit{ é verdadeiro, para todo } n \geq k.$$

Voltando à metáfora do dominó, o *princípio da indução forte* está ilustrado na Figura 2.

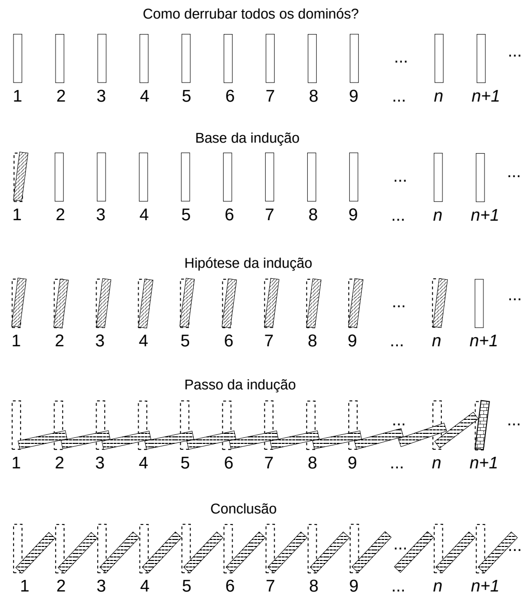

Figura 2: Princípio da Indução Forte

Observação: O leitor atento pode estar se perguntando porque uma das formas do princípio da indução é denominada fraca e a outra forte. Qual lhe parece intuitivamente a **técnica** *mais poderosa? Qual lhe parece a que permitiria demonstrar teoremas mais fortes? Para apaziguar esta curiosidade, diremos apenas que, apesar da nomenclatura, a indução forte não é mais poderosa do que que a indução fraca, isto é, elas são equivalentes. Deixamos ao leitor ávido o desafio de provar esta equivalência; e ao meramente interessado a referência [2].*

2 Exemplos

2.1 Exemplo 1

Teorema 3
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1 \textit{ para } n \geq 1$$

Este teorema [2] poderia ser transformado em uma implicação lógica da seguinte forma:

[2] Teorema 2.7 de [1].

$$\text{Se } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \text{ então } S < 1 \text{ para } n \geq 1$$

Prova: *(por indução simples em n)*

Base: para $n = 1$, temos $\frac{1}{2} < 1$

Hipótese: Assumimos que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1$

Passo:[3]

Considere:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \tag{2.1.1}$$

Se tomarmos os n últimos elementos da equação (2.1.1) e colocarmos $\frac{1}{2}$ em evidência temos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

E, comparando esta expressão com a hipótese de indução temos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2} \tag{2.1.2}$$

Agora, se somamos $\frac{1}{2}$ aos dois lados da equação (2.1.2) teremos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) < 1$$

Que é equivalente à equação (2.1.1). CQD

2.2 Exemplo 2

Teorema 4 *É possível* colorir *as regiões formadas por qualquer número de retas no plano com apenas duas cores (Figura 3).*[4]

Prova: *(por indução simples no número n de retas)*

Base: se há $n = 1$ retas, temos apenas duas regiões. (trivial)

Hipótese: Assumimos que o teorema é verdadeiro para n retas.

Passo: *Seja*[5] R um conjunto de $n + 1$ retas: $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, r_{n+1}\}$.

Pela hipótese de indução, as regiões formadas pelas retas do conjunto $R \setminus \{r_{n+1}\}$ podem ser coloridas com duas cores.

[3] Nem sempre se utiliza o último termo como $(n + 1)$-ésimo elemento para o passo.

[4] Teorema 2.6 de [1].

[5] É importante que a situação a ser resolvida no passo da indução seja completamente genérica. Por isso, *não devemos partir* do caso tratado pela hipótese para a partir deste caso menor, tentar construir um caso genérico maior — isso pode nem sempre ser possível. Isto é, há casos em que podemos só conseguir construir instâncias particulares (especiais) de tamanho $n + 1$ a partir de uma de tamanho n. Por isso, iniciamos o passo com uma situação genérica de tamanho $n + 1$, procurando isolar nela a que é prevista na hipótese de indução.

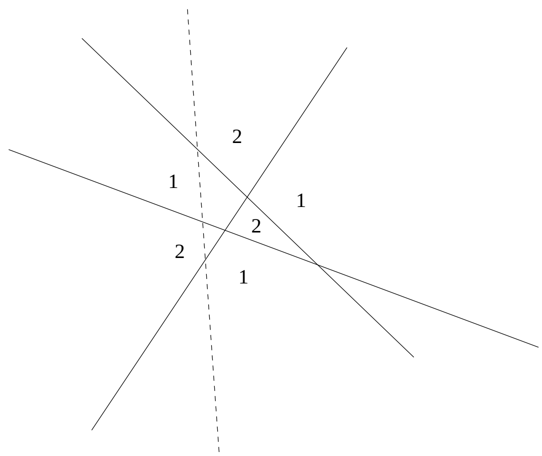

Figura 3: Teorema 4

Considere agora as regiões formadas por *todas* as retas de R. Para mostrar que estas regiões admitem uma 2-coloração, vamos modificar a coloração dada pela hipótese de indução da seguinte forma. Divida as regiões em dois grupos, digamos D e E, de acordo com o lado da $(n+1)$-ésima reta em que estão. Mantenha a coloração das regiões de D como estava e inverta as cores de todas as regiões de E.

Basta agora provar que esta é uma forma válida de colorir as regiões. Considere duas regiões vizinhas R_1 e R_2. Se ambas estão em D ou ambas em E, a hipótese de indução garante a validade da coloração. Se $R_1 \in D$ e $R_2 \in E$ (o caso simétrico é similar), então a aresta que as separa é um segmento de r_{n+1} e portanto elas pertenciam a uma mesma região na subdivisão gerada por $R \setminus \{r_{n+1}\}$ e tinham a mesma cor. Como a cor de R_2 foi invertida, elas têm agora cores diferentes. CQD

2.3 Exemplo 3

Teorema 5 $P(n) =$ *Consigo calcular o* n*-ésimo número da seqüência de Fibonacci* $(F(n))$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Prova: *(por indução forte em* n*)*

Base: $F(0) = 1$ e $F(1) = 1$.

Hipótese: Assumimos que $P(k)$ é verdade para $k \leq n - 1$[6].

[6] Este exemplo é um caso intermediário entre indução forte e fraca, pois na verdade a hipótese de indução apóia-se em apenas dois elementos anteriores, e poderia ser formulada como: $P(k)$ é verdade para $n-1$ e $n-2$.

Passo: Queremos mostrar $P(n)$, $n \geq 2$. Da definição de seqüência de Fibonacci sabemos que:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Como, por hipótese de indução, podemos calcular $F(n-1)$ e $F(n-2)$, podemos assim calcular também $F(n)$. CQD

2.4 Exemplo 4

Considere o seguinte teorema obviamente falso:

Teorema 6 *Dado um conjunto R de n retas, todas são paralelas.*

Prova: *(por indução simples em n)*

Base: Para $n = 1$ o teorema é verdade (trivial).

Hipótese: Assumimos que dado um conjunto de $n-1$ retas, todas são paralelas.

Passo: Seja R um conjunto de n retas. Retiramos deste conjunto a reta a. Para o conjunto remanescente $(R \setminus \{a\})$, por hipótese de indução, o teorema é verdade, ou seja, todas as retas nele são paralelas. Recoloquemos agora a reta a em R e retiremos uma outra reta b. Podemos igualmente aplicar a hipótese de indução ao conjunto resultante $(R \setminus \{b\})$, e todas as retas dele são também paralelas.

Considere agora uma outra reta $c \in R$. Como $c, b \in (R \setminus \{a\})$, deduzimos que c e b são paralelas. Analogamente, como $c, a \in (R \setminus \{b\})$, deduzimos que c e a são paralelas. Mas, por transitividade, temos que $a \parallel c$ e $c \parallel b$ implicam que $a \parallel b$, e sendo assim todas as retas em R são paralelas. "CQD"

Mas o que há de errado com esta prova? Sabemos que o teorema é falso, portanto, algo está errado. Seria a técnica utilizada no passo indutivo? Na verdade não. O problema da prova anterior está numa descontinuidade dos casos cobertos pela base e pelo passo, pois provamos no passo casos de pelo menos três retas, porém a base cobre apenas o caso com uma única reta. Não é possível incorporar o caso com $n = 2$ retas nem ao passo nem à base, pois, é claro, este caso é falso! Fica com este exemplo, a observação de que numa prova por indução o passo deve sempre ser provado verdadeiro a partir do ponto em que a base estabeleceu.

2.5 Exemplo 5

Teorema 7 (Teorema de Euler) *O número de vértices V, arestas E e faces F de um mapa planar conexo*[7] *(Figura 4 arbitrário satisfazem a equação:*

$$V + F = E + 2$$

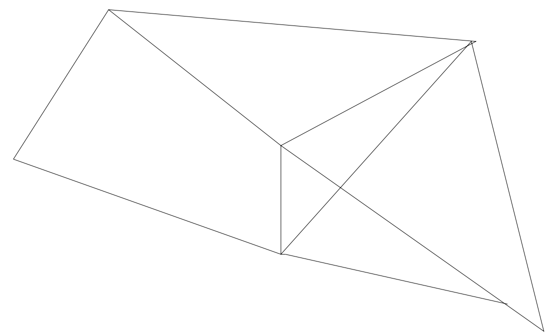

Figura 4: Um exemplo de Mapa Planar Conexo

Este teorema[8] é bastante ilustrativo, pois possui três parâmetros possíveis para indução. Para escolher o parâmetro que utilizaremos na prova por indução devemos pensar primeiramente no passo indutivo, considerando as dificuldades para formulá-lo.

Para esta prova, poderíamos, por exemplo, escolher o número de vértices (V) como parâmetro de indução; neste caso teríamos que retirar um vértice de um mapa de n vértices, preservando, entretanto, a conexidade do mapa, para satisfazer o enunciado do teorema. Embora talvez seja possível, a prova ficaria demasiado complexa. Se pensarmos em uma indução no número de arestas constatamos o mesmo problema. Desta forma, o parâmetro que torna a prova mais simples é o número de faces.

Para reduzir o número de faces do mapa, retiramos uma de suas arestas. A conexidade fica garantida porque sempre iremos eliminar uma face limitada, em que há um ciclo. Fica assim claro que ao eliminar a aresta continua havendo caminho entre os vértices aos quais ela estava ligada.

Para provar o teorema de Euler, provamos primeiro um Lema e um teorema auxiliar que utilizaremos como base da indução final.

Lema 1 *Um mapa conexo acíclico M' possui pelo menos um vértice de grau*[9] *1.*

Prova: Para provar o lema utilizamos o seguinte método: escolha um vértice arbitrário de M'; se este vértice possui grau 1 o lema já está provado. Se não, ande na fronteira do mapa, ou seja, escolha outro vértice, que esteja conectado por uma aresta ao vértice anterior. Se, repetindo este procedimento, chegássemos a um vértice já visitado, o mapa conteria um ciclo, o que contradiz

[7] Dois vértices são denominados conectados se é possível ir de um vértice ao outro através de arestas do mapa. Um mapa é denominado conexo se cada par de vértices que contém está conectado.

[8] Teorema 2.8 de [1].

[9] Define-se grau de um vértice como o número de arestas incidentes a ele.

uma de nossas hipóteses. Desta forma, a repetição levará inexoravelmente a um vértice de grau 1, já que estamos lidando apenas com mapas finitos. CQD

Teorema 8 (Teorema Base) *Seja um mapa de uma face* $(F = 1)$[10]*. Então* $V + 1 = E + 2$*.*

Prova: *(por indução simples em V)*

Base: Para $V = 1$. Como, pelo enunciado, $F = 1$, o mapa não possui arestas ($E = 0$). Logo a expressão $V + 1 = E + 2$ vale.

Hipótese: Dado mapa planar conexo com $F = 1$ e $V = n$, então $V + 1 = E + 2$.

Passo: Seja M' um mapa planar conexo com $F' = 1$ e $V' = n + 1$. Pelo Lema 1, M' tem (pelo menos) um vértice v de grau 1. Façamos $M = M' \setminus v$. Em M, temos:

$$E = E' - 1 \tag{2.5.1}$$

$$V = V' - 1 \tag{2.5.2}$$

e

$$F = F' = 1 \tag{2.5.3}$$

Mas, por hipótese de indução, $V + F = E + 2$; substituindo nesta expressão (2.5.1), (2.5.2) e (2.5.3), temos:

$$V' + F' = E' + 2$$

CQD

Passemos agora finalmente à prova do Teorema 7.

Prova (Teorema de Euler): *(por indução simples em F)*

Base: para $F = 1$, aplica-se o Teorema Base 8.

Hipótese: Assumimos que num mapa planar conexo M, com n faces ($F = n$) temos: $V + F = E + 2$.

Passo: Seja M' um mapa planar conexo com $F' = n + 1 \geq 2$. Como M' tem pelo menos duas faces, M' tem uma face limitada f[11]. No conjunto de arestas da face f existe um ciclo (pois é limitada). Seja e uma aresta de f que faça parte de um ciclo na froteira de f.

Seja $M = M' \setminus e$. Em M[12], temos:

$$F = F' - 1 \tag{2.5.4}$$

$$E = E' - 1 \tag{2.5.5}$$

[10] Como sabemos, todo mapa possui uma face ilimitada, se $F = 1$, então esta face é ilimitada, logo o mapa não tem ciclos.

[11] Ver nota 8.

[12] Como a aresta e faz parte de ciclo, o mapa M também é conexo.

$$V = V' \tag{2.5.6}$$

Mas, por hipótese de indução, $V + F = E + 2$; substituindo nesta expressão (2.5.4), (2.5.5) e (2.5.6), temos:

$$V' + F' = E' + 2$$

CQD

A prova deste teorema é chamada por alguns autores de indução dupla, porém como não são usados dois parâmetros simultaneamente na indução, preferimos dizer que foram aqui empregadas duas induções: uma para o teorema de Euler e outra para demonstrar sua base.

2.6 Exemplo 6

Para o exemplo que se segue, primeiro formularemos algumas definições.

Grafo: Um *grafo* é um par $G = (V, E)$ onde V um conjunto finito e $E \subset V \times V$. V é denominado conjunto de vértices e E conjunto de arestas de G.

Conjunto independente: Um subconjunto I de V é chamado um *conjunto independente de vértices de* G se nenhum par de vértices de I está ligado por uma aresta de G.

Vizinhança de um vértice: Denominamos de *vizinhança de um vértice* $v \in V$ ao conjunto

$$N(v) = \{v\} \cup \{w \in V : (v, w) \in E\}.$$

Um vértice v é **alcançável** a partir de um vértice v', se existe um caminho dirigido de v até v'.

Agora vamos ao teorema propriamente dito:

Teorema 9 [13] *Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido. Então, existe um conjunto independente $S(G)$ em G tal que cada vértice de G é alcançável a partir de algum vértice de $S(G)$ por um caminho de comprimento menor ou igual a dois.*

Prova: *(por indução forte em $n = |V|$)*

Base: $n = 1$ (trivial).

Hipótese: Assumimos que se $G' = (V, E)$ é um grafo dirigido com $|V| \leq n - 1$ vértices, então existe um conjunto independente $S(G')$ tal que cada $v \in V$ é alcançável a partir de algum vértice de $S(G')$ por um caminho de comprimento no máximo dois.

Passo: Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido com $n = |V| \geq 2$. Tome um vértice arbitrário v de G e seja $H = G \setminus N(v)$. Por hipótese de indução, existe um conjunto independente $S(H)$ em H tal que todo vértice de H é alcançável a partir de algum vértice de $S(H)$ por um caminho de comprimento no máximo dois.

Observe que $S(H)$ é conjunto independente também em G. Desta forma, temos dois casos:

[13] Teorema 2.9 de [1]

1. Se existe $w \in S(H)$ tal que $(w, v) \in E$, basta tomar $S(G) := S(H)$.
   Exercício: Justifique.

2. Se não existe $w \in S(H)$ tal que $(w, v) \in E$, tome $S(G) := S(H) \cup \{v\}$.
   Exercício: complete a prova mostrando que, neste caso, $S(G)$ é um conjunto independente em G e que cada vértice de G é alcançável a partir de um vértice de $S(G)$ por caminho de comprimento no máximo dois.

CQD

2.7 Exemplo 7

Faremos duas definições e demonstraremos um lema auxiliar antes da apresentação do teorema.

Caminhos aresta-disjuntos: dois caminhos em um grafo que não possuem aresta em comum são chamados *caminhos aresta-disjuntos*.

Componente conexa: cada subgrafo de um grafo G que seja maximal relativamente à propriedade de conexidade é chamado de *componente conexa* de G.

Lema 2 *Dado um grafo não orientado, o número de seus vértices que têm grau ímpar é par.*

Exercício: Demonstre o lema acima por indução. Sugestão: use indução no número de arestas.

Prova: *(Direta)* Seja $G = (V, E)$ o grafo dado. Considere os conjuntos $I = \{v \in V : g(v) \text{ é ímpar}\}$ e $P = V \setminus I$. Então:

$$2|E| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in P} g(v) + \sum_{v \in I} g(v)$$

Logo:

$$2|E| - \sum_{v \in P} g(v) = \sum_{v \in I} g(v) \qquad (2.7.1)$$

Analisando (2.7.1), vemos que os dois termos do lado esquerdo da equação são pares, o que implica que o somatório à direita também deve ser par. Como sabemos que os $g(v)$'s internos deste somatório são ímpares, o número de suas parcelas deve ser par. Portanto, o número de vértices de graus ímpares, $|I|$, é par. CQD

Passemos ao teorema principal.

Teorema 10 *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não orientado e seja I o conjunto de vértices de grau ímpar de G. Então é possível dividir I em pares e construir caminhos aresta-disjuntos entre os vértices destes pares*[14]*.*

[14] Teorema 2.12 de [1].

Prova: *(por indução forte em $m = |E|$)*

Base: $m = 0$ e $m = 1$ são trivialmente verdadeiros.

Hipótese: Assumimos que o teorema é verdadeiro para grafos com até $m-1$ arestas.

Passo: Seja $G = (V, E)$ um grafo com $m = |E|$ arestas, e seja I o conjunto dos vértices de grau ímpar. Temos os seguintes casos:

1. Se $I = \emptyset$, o teorema é trivialmente verdade (por vacuidade).

2. Caso contrário: Sejam $a, b \in I$, pela conexidade de G, existe um caminho P de a até b. Seja $G' = (V', E')$ em que $V' = V$, $E' = E \setminus C$ e C é o conjunto de arestas de P. Como $|C| \geq 1$, $|E'| < |E|$

Desejaríamos agora aplicar a hipótese de indução, porém, isto não é possível pois o grafo pode não mais ser conexo, condição necessária da hipótese. Empregaremos, então, uma técnica conhecida como *fortalecimento da hipótese de indução*, que consiste em retirar do enunciado do teorema uma de suas hipóteses, transformando-o em um teorema, portanto, mas forte.[15]

Neste exemplo, retiraremos do enunciado do teorema a exigência de conexidade. O passo reformulado será:

Passo': Seja $G = (V, E)$ um grafo com $m = |E|$ arestas, e seja I o conjunto dos vértices de grau ímpar. Temos os seguintes casos:

1. Se $I = \emptyset$, o teorema é trivialmente verdade (por vacuidade).

2. Caso contrário: Tome $a, b \in I$ em uma mesma componente conexa de G[16]. Pela conexidade da componente que os contém, existe um caminho P de a até b. Seja $G' = (V', E')$ onde $V' = V$, $E' = E \setminus C$ e C é o conjunto de arestas de P. Como $|C| \geq 1$, então $|E'| < |E|$. Logo, *por hipótese de indução*, o teorema vale para G'. Como retiramos as arestas de P, os caminhos aresta-disjuntos de G' são aresta-disjuntos com P, logo, todos os caminhos de G são aresta-disjuntos. CQD

2.8 Exemplo 8

Este exemplo introduzirá o *Princípio da Indução Reversa*, com a prova de um teorema que relaciona a média aritmética com a média geométrica[17], atribuída a Cauchy. Para melhor entender este princípio podemos recorrer novamente à metáfora do dominó, ilustrado na Figura 5.

[15] Esquematicamente, esta técnica consiste em transformar um teorema da forma: A e B e $C \Rightarrow D$ e E na expressão: A e $B \Rightarrow D$ e E que é mais forte que a anterior, pois chegamos à mesma conclusão fazendo menos hipóteses.

[16] A existência de tais vértices *numa mesma componente conexa* é conseqüência da aplicação do lema 2.

[17] Teorema 2.13 de [1].

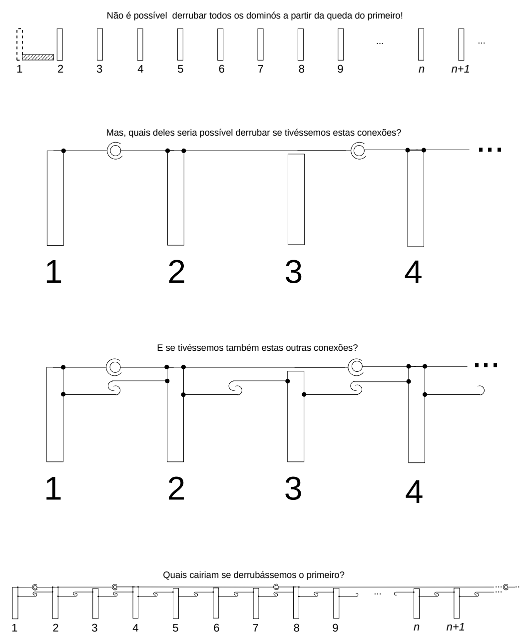

Figura 5: Princípio da Indução Reversa

Princípio da indução finita 11 (Reversa)
Sejam P_n afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas associadas a cada inteiro positivo $n \geq k$. Se "P_{ℓ_i} é verdadeiro para uma seqüência crescente $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots) \subset \mathbb{N}$*", e para cada inteiro positivo j maior que ℓ_1, "se P_j é verdadeiro, então P_{j-1} também o é", então "P_n é verdadeiro" para todo $n \geq \ell_1$.*

Formalmente, das duas afirmações:

$$P_{\ell_i} \text{ é verdadeiro para uma seqüência crescente } (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots) \subset \mathbb{N} \tag{1.1}$$

$$\text{se } P_j \text{ é verdadeiro, então } P_{j-1} \text{ é verdadeiro, } j > \ell_1 \tag{1.2}$$

deriva-se:

$$P_n \text{ é verdadeiro, para todo } n \geq \ell_1 \tag{1.3}$$

Teorema 12 *Se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são números positivos, então:*

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Prova: *(por indução reversa em n)*

Base: Queremos mostrar que o teorema é verdadeiro para uma seqüência infinita (crescente) de valores de n. Usaremos potências 2^k.

Prova (da base): *(por indução simples em k)*

Base:

$$(x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Exercício: prove esta afirmação.

Hipótese: O teorema vale para $n = 2^k$.

Passo: Queremos demonstrar que o teorema vale para 2^{k+1}, $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &= (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{2n}} \cdot (x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \ldots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{2n}} \\ &= \sqrt{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \cdot (x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \ldots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

Fazendo $y_1 = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$ e $y_2 = (x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \ldots \cdot x_{2n})^{\frac{1}{n}}$ e empregando a base ($n = 2$), temos:

Veja só: às vezes se aplica a base no passo!

$$(y_1 y_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Mas, aplicando agora a hipótese de indução para n temos:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \leq \frac{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{n}}{2}$$

De onde podemos derivar o caso $2n$, que é 2^{k+1}, pois:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{2n}$$

CQD

Voltamos agora à demonstração do Teorema 12.

Hipótese: Assumimos que o teorema vale para $n > 2$.

Passo: Queremos mostrar que o teorema vale para $n - 1$, isto é, que:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1}.$$

Mas, sabemos por hipótese de indução que, para qualquer $z > 0$:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + z}{n} \tag{2.8.1}$$

Então, em particular, podemos escolher z como:

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1} \tag{2.8.2}$$

Substituindo a expressão 2.8.2 no lado direito da inequação 2.8.1 temos:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(n-1)z + z}{n} = z \tag{2.8.3}$$

Elevando-se à potência n ambos os lados da inequação 2.8.3, temos:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot z) \leq z^n$$

$$\therefore \quad (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z$$

Substituindo agora z pelo seu valor em 2.8.2, temos:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$$

CQD

Observação: Convém ressaltar que não se devem confundir os passos de induções reversas ($P(n) \Rightarrow P(n-1)$) com os de induções diretas ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$), e, nem tão pouco, se deve esquecer que a base de uma indução (*infinita*) reversa precisa ser uma seqüência crescente e não apenas um caso inicial.

Por outro lado, note que, se na indução reversa, se demonstra na base apenas um caso inicial (isolado), digamos n_0, a demonstração estabelece a veracidade da afirmação em questão apenas para $n \leq n_0$ (e não para uma família infinita de valores de n), tornando assim uma indução (*finita*) reversa. Veja um exemplo no parágrafo 7.12.2 de [1].

Referências

[1] U. Manber, *Algorithms: A Creative Approach*, Addison-Wesley.

[2] F. Preparata, R. Yeh, *Introduction to Discrete Structures*, Addison-Wesley.

[3] D. F. Stanat, D. F. McAllister, *Discrete Mathematics in Computer Science*, Prentice Hall.